

Zur Dämpfung kollektiver Schwingungen in entarteten Fermionensystemen

von

Peter Hiltner
aus Erlangen

*Liss
Erlangen
1985*

1985 196

Zur Dämpfung kollektiver Schwingungen in entarteten Fermionensystemen

**Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg**

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von

Peter Hiltner

aus Erlangen

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 23. 12. 1985

Vorsitzender der Promotionskommission:	Prof. Dr. K. Brodersen
Erstberichterstatte:	Prof. Dr. C. Toepffer
Zweitberichterstatte:	Prof. Dr. P.G. Reinhard

Inhaltsverzeichnis

Gebrauchsanleitung		0
Zusammenfassung		1
I. Der 0. Schall in der Landautheorie		3
1. Quasiteilchen	3	
2. Die kinetische Energie der Quasiteilchen	8	
3. Lösungen der kinetischen Gleichung	12	
4. Der dynamische Formfaktor	15	
5. Parameter für ^3He	17	
II. Stoßkinematik und Größenordnungsbetrachtungen		19
III. Bewegungsgleichung für die Dichtematrix		25
IV. Ausbreitung von 0. Schall		43
1. Eigenwertgleichung	44	
2. Der dynamische Formfaktor	49	
V. Dämpfung von 0. Schall		55
1. Matrixelemente des Stoßoperators	56	
2. Eigenwertgleichung	60	
3. Der dynamische Formfaktor	66	
VI. Der dynamische Formfaktor in ^3He		71
Ausblick		83
Anhang III		85
Anhang IV		87
Anhang V		93
Literaturverzeichnis		105

Gebrauchsanleitung

Diese Arbeit gliedert sich in 6 Kapitel, die mit römischen Ziffern numeriert sind, und einen Anhangteil, dessen Numerierung auf das zugehörige Kapitel zurückverweist.

Die Formeln sind so durchnummeriert, daß z. B. die dritte Formel in Kapitel I die Nummer (1.3) bekommt. Diese Formel wird innerhalb von Kapitel I mit (3) in anderen Kapiteln mit (1.3) zitiert.

Das Zeichen $:=$ bedeutet eine Definition, $\equiv$ bedeutet identisch gleich, $\approx$ bedeutet ungefähr oder asymptotisch gleich (je nach Zusammenhang).

"Im übrigen, mein Sohn, laß dich warnen! Es nimmt des Bücherschreibens kein Ende, und viel Studieren macht den Leib müde."

Der Prediger Salomo 12,12

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit wendet die Gleichungshierarchie der Vielteilchen-Greenfunktionen ("Martin-Schwinger - Hierarchie") auf ein unendlich ausge-dehtes, entartetes Fermionensystem an. Die Hierarchie wird so abgebrochen, daß Korrelationen in niedrigster Ordnung noch mitgenommen werden. Das Ergebnis ist eine geschlossene Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Greenfunktion, aus der eine Bewegungsgleichung für die verallgemeinerte Verteilungsfunktion (die "Besetzungszahlmatrix") der Elementaranregungen des Systems gewonnen wird. Die Ankopplung an die Zweiteilchen-Greenfunktion wird dabei in der Weise behandelt, daß diese nach Leitergraphen entwickelt und bis zur ersten Ordnung mitgenommen wird; die nullte Ordnung dieser Entwicklung (die "Gorkov-Faktorisierung") liefert in der Bewegungsgleichung für die verallgemeinerte Verteilungsfunktion einen mittleren-Feld - Term, die erste Ordnung (die die Korrelationen berücksichtigt) spielt die Rolle eines Stoßintegrals. Dieses Vorgehen ist äquivalent zu einer temperaturabhängigen RPA-Rechnung, die dadurch erweitert ist, daß $2p-2h$ - Anregungen an die $1p-1h$ - Anregungen an koppeln.

Der für die Lösung dieser Gleichung entscheidende Schritt ist die Wahl eines Ansatzes für die Einteilchen-Greenfunktion durch Einführen einer Besetzungszahlmatrix im $p-h$ - Raum, und ferner eines Ansatzes für die Besetzungszahlmatrix selbst. Dieser berücksichtigt sowohl diagonale als auch nichtdiagonale Korrekturen zur Gleichgewichtsverteilungsfunktion (die Diagonale entspricht der Verteilungsfunktion im engeren Sinn). Beide enthalten nicht nur die HF-Energien der Einteilchenzustände, sondern auch eine Frequenz ω , die als Frequenz einer kollektiven Schwingung oder als durch eine äußere Störung aufgeprägte Frequenz verstanden werden kann. Aufgrund der Impulserhaltung im unendlich ausgedehnten System entkoppeln in der Bewegungsgleichung die diagonalen von den nichtdiagonalen Korrekturen. Die diagonale Bewegungsgleichung beschreibt Relaxationen und wird nicht weiter betrachtet, während die nichtdiagonale Bewegungsgleichung den Ausgangspunkt für die Untersuchung der kollektiven Bewegung und deren Dämpfung bildet. Diese Untersuchung wird vom Standpunkt der linearen Antworttheorie aus durchgeführt, d.h. es wird der dynamische Formfaktor, den man aus der Bewegungsgleichung mit einer harmonischen äußeren Störung gewinnt, betrachtet.

In der vorliegenden Arbeit wird diese Untersuchung beschränkt auf den einfachsten - möglichen Fall einer δ -förmigen Wechselwirkung zwischen den Teilchen (d.h. einer Konstanten im Impulsraum). Außerdem werden keine Spineffekte betrachtet und die kollektive Bewegung soll makroskopischen Charakter haben (kleine Frequenz und kleiner Wellenvektor), so daß dieser Typ kollektiver Bewegung dem einfachsten Mode Nullten Schalls der Landautheorie entspricht. Vernachlässigung des Stoßintegrals reproduziert deren Ergebnisse.

Die Einbeziehung der $2p-2h$ - Anregungen, d.h. die Behandlung des Stoßintegrals, ist das Kernstück dieser Arbeit. Dabei wird nicht nur die Abhängigkeit von der Temperatur T , sondern auch von den dynamischen Parametern ω und g betrachtet. Das Stoßintegral zerfällt in einen reellen Hauptwertanteil und einen imaginären δ -Anteil; der Hauptwertanteil, der das mittlere Feld renormieren würde, wird vernachlässigt. Der δ -Anteil liefert den dissipativen Term der Bewegungsgleichung; mit der für entartete Fermionensysteme üblichen Einschränkung der Dynamik auf einen kleinen Bereich um die Fermifläche ist es möglich, ihn auf eine relativ einfache Form zu bringen. Er zerfällt in drei Graphen: der erste stellt einen Beitrag höherer Ordnung zum mittleren Feld, die beiden anderen "echte Stöße" dar. Bei der Berechnung der Resolvente der Bewegungsgleichung (der Antwortfunktion des Systems) wird das Stoßintegral in die Bornsche Reihe entwickelt, wovon die nullte und erste Ordnung in die Resolvente Eingang findet. Die Einschränkung in der Dynamik geschieht insofern nicht in Strenge auf die Fermifläche, als Winkelgewichtsfunktionen, die endlichen Werten von ω, g und T angepaßt sind, diskutiert werden.

I. Der Nullte Schall in der Landautheorie

1. Quasiteilchen

Mit Nulltem Schall bezeichnet man eine spezielle, kollektive Anregungsform einer neutralen Fermiflüssigkeit bei sehr tiefen Temperaturen. Die Bezeichnung "Nullter Schall" wurde von L.D. Landau geprägt, von dem die ersten theoretischen Untersuchungen dazu stammen [1,2]. Er entwickelte für Temperaturen weit unter der Entartungstemperatur eine phänomenologische Theorie normaler, d.h. nicht suprafluider, Fermiflüssigkeiten und ihrer "makroskopischen" Eigenschaften (die durch kleinen Wellenvektor und kleine Frequenz gekennzeichnet sind). Diese Theorie ist als Landautheorie bekannt. Wir wollen einleitend einige allgemeine Eigenschaften des Nullten Schalls im Rahmen dieser Theorie diskutieren.

Ausgangspunkt ist die kinetische Gleichung für die Verteilungsfunktion $n(\mathbf{p}; \mathbf{c}, t)$ der Fermionen [1]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{c}} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{c}} = I(n) \quad (1.1)$$

Um diese Gleichung auf den Fall eines wechselwirkenden Fermionensystems ("Flüssigkeit") anzuwenden, führt Landau das Konzept der Quasiteilchen ein. Diese entstehen - anschaulich gesprochen - dadurch, daß die Fermionen auf Grund der gegenseitigen Wechselwirkung ihre Umgebung "polarisieren", die Gesamtheit aus Fermion plus Polarisierungswolke ergibt das Quasiteilchen. Präziser läßt sich der Begriff des Quasiteilchens fassen, wenn man einen "adiabatischen" Übergang vom wechselwirkungsfreien System (Fermigas) zum wechselwirkenden System (Fermiflüssigkeit) betrachtet. Dabei stellt man sich vor, daß die Wechselwirkung "unendlich langsam eingeschaltet" wird. Ein solcher Übergang ändert die Klassifizierung der Zustände nicht, die aber nicht mehr von den Teilchen selbst (wie im wechselwirkungsfreien Fall), sondern von sogenannten "Elementaranregungen" besetzt werden. Diese verhalten sich, solange das System nur schwach angeregt ist, wie Teilchen und bekommen deshalb den Namen Quasiteilchen. Von den wirklichen, "nackten" Fermionen unterscheiden sie sich durch ihre Dispersionsrelation. Dagegen stimmt ihre Anzahl mit der Zahl der "nackten" Teilchen offensichtlich überein. Auch werden sie durch die gleiche Verteilungsfunktion beschrieben wie diese vor dem "Einschalten"

der Wechselwirkung; im Gleichgewicht folgen die Quasiteilchen also der Fermi-Verteilung. Die Energie des Gesamtsystems ist jetzt allerdings nicht einfach die Summe der Quasiteilchenenergien, sondern ein Funktional der Quasiteilchen-Verteilungsfunktion.

Dieses Konzept ist nur sinnvoll, wenn das Quasiteilchen ein hinreichend stabiles Gebilde ist. Dadurch ist man von vornherein auf Energien in der Nachbarschaft der Fermifläche S_F und auf Temperaturen weit unterhalb der Entartungstemperatur (die für flüssiges ^3He bei 2K liegt!) beschränkt. Man kann nämlich zeigen [3], daß die Lebensdauer von Quasiteilchen mit einer Energie ε weit oberhalb des chemischen Potentials μ proportional zu $(\varepsilon - \mu)^{-2}$ fällt, während Quasiteilchen weit innerhalb der Fermifläche zumindest bei niedrigen Temperaturen (im Vergleich zur Entartungstemperatur) nicht am dynamischen Geschehen teilnehmen können, weil sie dann durch das Pauliprinzip "eingefroren" sind (bei höheren Temperaturen fällt ihre Lebensdauer exponentiell mit der Entfernung von S_F). Das dynamische Geschehen wird von den Quasiteilchen innerhalb der "diffusen" Zone der Verteilungsfunktion bestimmt, deren Breite (im Gleichgewichtsfall bei gegebener Temperatur T) bekanntlich von der Größenordnung $2k_B T$ ist (k_B ist die Boltzmannkonstante). Die Lebensdauer τ dieser Quasiteilchen wird im wesentlichen durch die Stöße untereinander begrenzt, d.h. sie ist gleich der mittleren "freien Flugzeit" zwischen zwei Stößen und als solche umgekehrt proportional zur Stoßwahrscheinlichkeit. Diese wiederum ist proportional zu $(k_B T)^2$, da für Fermionen die Stoßpartner sowohl vor als auch (wegen der Energieerhaltung) nach dem Stoß innerhalb der diffusen Zone der Verteilung liegen müssen. Die Lebensdauer der Quasiteilchen innerhalb der diffusen Zone sinkt also quadratisch, wenn die Temperatur wächst. Diese Betrachtung wird ergänzt durch die Bedingung, die sich aus der Energieunschärferelation ergibt. Die Energieunschärfe ist größenordnungsmäßig $\hbar/\tau$, und sie muß für ein Quasiteilchen, dessen Energie einen bestimmten Wert innerhalb der diffusen Zone hat, wesentlich kleiner als $k_B T$ sein, was zu der Bedingung

$$\left(\frac{k_B T}{\mu}\right)^2 \ll \frac{k_B T}{\mu} \quad (1.2)$$

führt (das chemische Potential μ ist der einzige Skalenparameter, der in einem Fermionensystem bei tiefer Temperatur natürlicherweise zur Verfügung steht). Diese Bedingung, sowie die Beschränkung der Quasiteilchen auf S_F , ist grundlegend sowohl für die Landautheorie als auch für den Formalismus, der in

dieser Arbeit entwickelt werden soll. Es sei noch bemerkt, daß auch die Impulsunschärferelation, angewandt auf die mittlere freie Weglänge der Quasiteilchen, zu derselben Bedingung führt. Zugleich wird dadurch gerechtfertigt, daß man den Quasiteilchen sowohl einen bestimmten Impuls p zuschreibt als auch von Stößen, d.h. lokalisierten Ereignissen, spricht.

Wir bezeichnen jetzt die Verteilungsfunktion der Quasiteilchen mit $\tilde{n}$, die Gleichgewichtsverteilung mit n und betrachten den Fall, daß sich $\tilde{n}$ von n nur durch eine Störung δn unterscheidet, die gegenüber n von 1. Ordnung klein ist und auch vom Ort und von der Zeit abhängen kann:

$$\tilde{n}(p) = n(p) + \delta n(p; \underline{r}, t) \quad (1.3)$$

Man kann dann das Energiefunktional des Gesamtsystems, das wir als $E[\tilde{n}(p)]$ schreiben, nach der Abweichung $\delta n(p)$ vom Gleichgewicht entwickeln; Landau hat gezeigt [2], daß man dabei bis zu zweiten Ordnung gehen muß:

$$E[\tilde{n}(p)] \approx E_0 + \sum_p \varepsilon(p) \delta n(p) + \frac{1}{2} \sum_{p, p'} f(p, p') \delta n(p) \delta n(p') \quad (1.4a)$$

$f(p, p')$ ist als zweite Funktionalableitung von E nach δn symmetrisch in p und p' und beschreibt die Wechselwirkung der Quasiteilchen untereinander. Fügt man dem System im Gleichgewicht ein weiteres Quasiteilchen hinzu, so ist dessen Energie ξ gemäß (4a):

$$\xi(p; \underline{r}, t) = \varepsilon(p) + \sum_{p'} f(p, p') \delta n(p'; \underline{r}, t) =: \varepsilon(p) + \delta \xi(p; \underline{r}, t) \quad (1.4b)$$

(der Faktor 1/2 sorgt in (4a) dafür, daß gleiche Kombinationen von p und p' nicht doppelt gezählt werden, er tritt in (4b) nicht auf) Die Quasiteilchenenergien sind nur, solange in δn quadratische Terme nicht berücksichtigt werden, additiv.

Es muß betont werden, daß die Einführung einer Verteilungsfunktion $\tilde{n}(p)$ oder $n(p)$ angesichts der Beschränkung der Quasiteilchenenergien ξ auf S_F nur formale Bedeutung hat, die physikalisch relevante Größe ist δn , welches für kleine Temperaturen auf eine Umgebung von S_F beschränkt ist. Die Funktion $\xi(p)$ kann man um μ herum entwickeln, das ergibt

$$\xi(p; \underline{r}, t) - \mu = v_F(p - p_F) + \sum_{p'} f(p, p') \delta n(p'; \underline{r}, t) \quad (1.5a)$$

wobei

$$\varepsilon(\underline{p}) - \mu = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{p}} \right|_{\underline{p}_F} \cdot (\underline{p} - \underline{p}_F) \hat{p} = v_F (\underline{p} - \underline{p}_F) \quad (1.5b)$$

ist. In (5b) wurde davon ausgegangen, daß das System isotrop ist (kein äußeres Magnetfeld); die Quasiteilchengeschwindigkeit $\underline{v}$ und der Impuls $\underline{p}$ sind dann parallel. Die Tatsache, daß man es nicht mit "nackten" Fermionen sondern mit Quasiteilchen zu tun hat, kann man dann so ausdrücken, daß der $\underline{v}$ und $\underline{p}$ verbindende Massenparameter nicht die "nackte" Teilchenmasse m , sondern eine von der Wechselwirkung abhängige "effektive" Masse m^* ist. Es gilt also per definitionem:

$$v_F = \frac{p_F}{m^*} = \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{p}} \right|_{\underline{p}_F} \quad (1.6a)$$

und

$$\mu = \frac{p_F^2}{2m^*} = \frac{1}{2} \hbar k_F v_F \quad (1.6b)$$

Es sei bemerkt, daß der zum Fermi-Grenzimpuls p_F gehörige Wellenvektor k_F auf die gleiche Weise mit der Dichte N der Flüssigkeit zusammenhängt wie im Fall nicht wechselwirkender Fermionen mit der Gasdichte, nämlich

$$k_F^3 = 3\pi^2 N \quad (1.7)$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung auch für eine Flüssigkeit ist eine Grundannahme der Landautheorie und hängt mit dem "adiabatischen Einschalten" der Wechselwirkung zusammen. Gl.(5a) zusammen mit (6a) stellt die Dispersionsbeziehung für Quasiteilchen dar (die Formel $\varepsilon = p^2/2m^*$ hat dagegen abseits von S_F keine Bedeutung). Der Zusammenhang von m^* mit $f(\underline{p}, \underline{p}')$ wird durch die Forderung nach Galilei-Invarianz des Systems hergestellt. Diese führt nämlich zu (vgl. [7])

$$\frac{\underline{p}}{m} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{p}} = \int \frac{d^3 \underline{p}'}{(2\pi\hbar)^3} f(\underline{p}, \underline{p}') \frac{\partial \varepsilon(\underline{p}')}{\partial \underline{p}'} \quad (1.8)$$

Die Größe $\underline{p}/m$ ist die Geschwindigkeit des Massenstroms. Im isotropen System hängt $f(\underline{p}, \underline{p}')$ nur vom Winkel χ zwischen $\underline{p}$ und $\underline{p}'$ ab. Mit der Definition

$$\frac{v_{m^*} k_F}{\pi^2 \hbar^2} f(\chi) =: F(\chi) \quad (1.9)$$

erhält man dann aus (8)

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \cos(\chi) F(\chi) \quad (1.10)$$

$d\Omega'$ ist das zu d^3p' gehörige Raumwinkelement. Außerdem wurde die im folgenden häufig verwendete Beziehung ausgenützt, daß die Ableitung der Fermi-Verteilung für kleine Temperaturen sehr stark um p_F konzentriert ist (vgl. Formel (12)). Wir bemerken, daß $m^* = m$ gilt falls F konstant ist.

2. Die kinetische Energie der Quasiteilchen

Wir kehren jetzt zu Gl.(1) zurück und setzen (3) und (4b) ein. Linearisieren in δn führt dann zu folgender Gleichung:

$$\partial_t \delta n(\mathbf{p}; \mathbf{c}, t) + \partial_{\mathbf{c}} \delta n(\mathbf{p}; \mathbf{c}, t) \cdot \partial_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p}) - \partial_{\mathbf{p}} n(\mathbf{p}) \cdot \partial_{\mathbf{c}} \delta \xi(\mathbf{p}; \mathbf{c}, t) = 0 \quad (1.11)$$

Die Gleichung nullter Ordnung verschwindet identisch, da n und ξ als Gleichgewichtsgrößen nicht von $\mathbf{c}$ und t abhängen. Das Stoßintegral, das an sich ebenfalls Anteile erster Ordnung in δn enthält (die nullte Ordnung verschwindet, da im Gleichgewicht Gewinn- und Verlustterm einander kompensieren), wird im Rahmen der Landautheorie völlig vernachlässigt, da es wegen der oben diskutierten Temperaturabhängigkeit der Stoßwahrscheinlichkeit in höherer Ordnung mit der Temperatur gegen Null geht als die linke Seite von Gl.(11).

Der Ansatz (3) ist so zu verstehen, daß die Fermiverteilung n für $\delta n \neq 0$ aus Konsistenzgründen von der "gestörten" Quasiteilchenenergie ξ , nicht nur von ξ abhängt, sie beschreibt dann statt eines globalen ein lokales thermisches Gleichgewicht. Für die Ableitung von n können wir in nullter Ordnung δn schreiben:

$$\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial n}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{p}} \approx \frac{\partial n}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial n}{\partial \xi} \mathbf{v} \rightarrow -\delta(\xi - \mu) \mathbf{v} \quad \text{für } T \rightarrow 0 \quad (1.12)$$

Auf Grund der Linearität von (11) in δn ist es gerechtfertigt, δn nach ebenen Wellen zu entwickeln und nur eine Fourierkomponente mit der Frequenz ω und dem Wellenvektor $\mathbf{q}$ zu betrachten (oder man spezialisiert die Fragestellung von vornherein darauf, ob (11) für eine harmonische Störung δn eine Lösung hat). Mit dem Ansatz

$$\delta n(\mathbf{p}; \mathbf{c}, t) = \delta n(\mathbf{p}; \mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{c} - \omega t)} \quad (1.13)$$

sowie Gl.(12) erhält man

$$(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \delta n(\mathbf{p}; \mathbf{q}, \omega) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial n}{\partial \xi} \sum_{\mathbf{p}'} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}'; \mathbf{q}, \omega) = 0 \quad (1.14)$$

Der Bereich, innerhalb dessen der Wellenvektor q und die Frequenz ω im Ansatz (13) variieren können, ist wieder durch die Unschärferelation beschränkt. Die reziproken Werte von q bzw. ω bestimmen die räumliche bzw. zeitliche Skala, auf der sich die Verteilungsfunktion n wesentlich ändert. Eine quasiklassische Beschreibung (wie sie hier durch die Verwendung einer orts- und impulsabhängigen Verteilungsfunktion gegeben ist), erfordert dann, daß diese Skalen groß sind im Vergleich zu den entsprechenden atomaren Skalen; die quasiklassische Beschreibung kann nur "makroskopische" Phänomene erfassen. Das bedeutet, daß die Bedingungen

$$q \ll k_F, \quad \hbar\omega \ll \mu \quad (1.15)$$

erfüllt sein müssen.

$\delta n(\underline{p}; \underline{q}, \omega)$ ist für $T \rightarrow 0$ stark auf die Fermifläche konzentriert. Wir führen deshalb die Abweichung ψ von der Fermifläche ein, in dem wir aus δn einen Faktor $-q \cdot \underline{v} \frac{\partial n}{\partial \xi}$ herausziehen:

$$\delta n(\underline{p}; \underline{q}, \omega) := -q \cdot \underline{v} \frac{\partial n}{\partial \xi} \psi(\underline{p}) := -qv_F \cos \theta \frac{\partial n}{\partial \xi} \psi(\underline{p}) \quad (1.16)$$

Wenn man schließlich die Gl.(14) auf ein "unendlich ausgedehntes" System (d.h. ein System mit makroskopischen Dimensionen) anwendet, so kann man periodische Randbedingungen in einem Quader mit Volumen V einführen und die Summe über $\underline{p}'$ in ein Integral verwandeln gemäß

$$\sum_{\underline{p}'} \rightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{\sigma'} \int d^3 p' = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma'} \int d^3 k' \quad (1.17)$$

$\frac{\partial n}{\partial \xi}$ ersetzen wir durch die δ -Funktion, so daß die ganze Gleichung auf die Fermifläche beschränkt wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi k^2 \frac{\partial n}{\partial \xi} \rightarrow -\frac{m^* k_F}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \delta(\xi - \mu) \quad (1.18)$$

Nach Integration der gesamten Gleichung (14) mit $\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi$, Division durch qv_F und Einführen der Größe F gemäß (9) erhält man

$$(\omega - qv_F \cos \theta) \psi_{\sigma}(\hat{\underline{k}}) - \frac{1}{2} \sum_{\sigma'} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} F_{\sigma\sigma'}(\chi) qv_F \cos \theta' \psi_{\sigma'}(\hat{\underline{k}}') = 0 \quad (1.19)$$

($\hat{k}$ ist der Einheitsvektor in Richtung k). In Gl.(17) und (19) wurden explizit die Spinindizes σ eingeführt, von denen bislang nicht die Rede war. Wir müssen, bevor wir uns mit Gl.(19) weiter beschäftigen, die Spinabhängigkeit der Quasiteilchen-Wechselwirkungsfunktion $F_{\sigma\sigma'}(X)$ und der Dichteänderung δn näher diskutieren.

Die Quasiteilchen der Landauschen Theorie haben [7] den Spin $\frac{1}{2}$, die Spinindizes können deshalb die Werte $\pm\frac{1}{2}$ annehmen. Das heißt, daß in Gl.(3) usw. die Verteilungsfunktion $\tilde{n}$ im Spinraum als statistische (2x2)-Matrix $\tilde{n}_{\sigma\sigma'}$ zu verstehen ist. Ebenso ist die Quasiteilchenenergie $\tilde{\epsilon}$ eine (2x2)-Matrix und die Wechselwirkungsfunktion f ein Überprodukt zweier solcher Matrizen. Der Übergang zu beobachtbaren Größen geschieht wie üblich durch Matrixmultiplikation und Spurbildung. Wenn kein äußeres Magnetfeld vorliegt, können wir annehmen, daß die Verteilungsfunktion und ihre Änderung δn (die "Dichteschwankung") spinunabhängig sind, d.h. daß die Matrix $\tilde{n}_{\sigma\sigma'}$ diagonal ist und daß $\psi_+ = \psi_- =: \psi$ gilt. Bei spinunabhängiger Wechselwirkung genügt es dann, wenn wir die in (19) verwendete Schreibweise wählen, (14) wird dadurch zur Spinorgleichung. Die Spineinstellung σ des Quasiteilchens mit dem Impuls $\hat{k}$ kann man oBdA als bezüglich irgendeiner Achse vorgegeben betrachten (z.B. $\sigma = +\frac{1}{2} =: +$ bzgl. der Achse q), über die Spineinstellungen σ' der mit $(\hat{k}, \sigma)$ wechselwirkenden Quasiteilchen ist dann zu summieren. Die Summation über σ' liefert mit $\sigma = +$ einfach

$$\sum_{\sigma'} F_{\sigma\sigma'} = F_{++} + F_{+-} \quad (1.20)$$

Wir bemerken, daß $F_{+-} = F_{+}$ gilt, falls die Quasiteilchenwechselwirkung so ist, daß sie nicht unterscheidet zwischen dem Singlett- und dem Triplettzustand der wechselwirkenden Quasiteilchen. Üblicherweise führt man die folgende Zerlegung der Komponenten von $F_{\sigma\sigma'}$ ein (siehe z.B. [3]):

$$F_{++} := F^{(s)} + F^{(a)}, \quad F_{+-} := F^{(s)} - F^{(a)} \quad (1.21)$$

Führen wir noch den Azimutwinkel α des Vektors $\hat{k}$ bezüglich der Achse q ein, so wird (19):

$$(\omega - qv_F \cos\theta) \psi(\theta, \alpha) - \int \frac{dq'}{4\pi} F^{(s)}(X) qv_F \cos\theta' \psi(\theta', \alpha') = 0 \quad (1.22)$$

Wir bemerken, daß $F^{(a)}$ in dieser Gleichung nicht vorkommt.

Die Lösungen dieser Gleichung sind Schwingungen, die nach Landau als "Nullter Schall" bezeichnet werden. Diese Bezeichnung soll zum Ausdruck bringen, daß es sich um Schwingungen am absoluten Nullpunkt der Temperatur handelt, wo das Stoßintegral verschwindet bzw. die freie Flugzeit τ der Quasiteilchen zwischen zwei Stößen unendlich wird. In etwas abgeschwächter Form, für Temperaturen sehr nahe am absoluten Nullpunkt, kann man das Regime nullten Schalls also durch folgende Bedingung charakterisieren:

$$\theta\tau \gg 1$$

(1,23)

d.h. in der Zeit $\frac{2\pi}{\omega}$ einer Schwingung finden praktisch keine Stöße statt.

Der Nullte Schall ist somit das konträre Gegenteil des "normalen", hydrodynamischen Schalls (folgerichtig auch "1. Schall" genannt), für dessen Ausbreitung die Stöße gerade das Wesentliche sind und für den sich deshalb die Ungleichung (23) umdreht.

3. Lösungen der kinetischen Gleichung

Gl.(22) beschreibt verschiedene Typen von Nulltem Schall, die sich durch ihre axiale Symmetrie unterscheiden. Wenn man $F^{(s)}(\chi)$ nach Legendrepolyomen bzw. Kugelflächenfunktionen entwickelt (und damit die "Landauparameter" $F_\ell^{(s)}$ einführt) gemäß

$$F^{(s)}(\chi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} F_\ell^{(s)} P_\ell(\chi) = \sum_{\ell, m} F_\ell^{(s)} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}^*(\theta, \alpha) Y_{\ell m}(\theta', \alpha') \quad (1.24)$$

und $\varphi(\theta, \alpha)$ analog entwickelt, so sieht man, daß sich durch Projektion mit $e^{im'\alpha}$ Gl.(24) hinsichtlich der m -Werte entkoppeln läßt. Jedem Typ entspricht eine andere Deformation der Fermifläche und eine andere Schallgeschwindigkeit. Man kann zeigen, daß Lösungen ohne axiale Symmetrie, d.h. für $m > 0$, das von der Fermioberfläche eingeschlossene Volumen ungeändert lassen (es ist dann $\int d\Omega' \varphi = 0$). Das bedeutet, daß die Schwingung ohne Änderung der Flüssigkeitsdichte stattfindet. Dem 1. Schall am nächsten verwandt ist deshalb der axial-symmetrische $m=0$ - Typ.

Wir wollen Gl.(22) für den einfachst-möglichen Fall $F^{(s)}(\chi) = F_0^{(s)} = \text{const}$ lösen. In diesem Fall gibt es offensichtlich nur den $m=0$ - Typ. Wir schreiben $s := \cos\theta$, $\varphi(\theta, \alpha) = \varphi(s)$, dividieren durch qv_F und führen die auf v_F normierte Phasengeschwindigkeit

$$\bar{s} := \frac{\varphi}{qv_F} \quad (1.25)$$

ein, dann erhalten wir aus (22) die Gleichung

$$(\bar{s}-s)\varphi(s) - \frac{F_0}{2} \int_{-1}^1 ds' s' \varphi(s') = 0 \quad (1.26)$$

Der Index (s) an F_0 wird im folgenden der Einfachheit halber weggelassen.

Als Integralgleichung ist (26) nicht besonders angenehm, da der Integralkern singulär ist (für die Standardform einer Integralgleichung ist der Term $-s\varphi(s)$ mittels einer δ -Funktion unter das Integral zu ziehen). Effektiv ist (26) allerdings gar keine richtige Integralgleichung, da der Integralanteil keine Abhängigkeit von s aufweist (erst im Stoßintegral wird eine solche auftreten).

Im Fall $\bar{s} > 1$, den wir zuerst betrachten wollen, ist die Lösung offensichtlich

$$\psi(s) = \frac{1}{\bar{s}-s} \frac{F_0}{2} \frac{1}{-1} \int_{-1}^s ds' s' \psi(s') =: \frac{1}{2} \frac{B(\bar{s})}{\bar{s}-s} \quad (1.27)$$

mit einer nur von $\bar{s}$ abhängigen Normierungskonstanten $B(\bar{s})$. Durch Einsetzen von (27) in (26) ergibt sich die Bedingung

$$1 = F_0 Q_1(\bar{s}) \quad (1.28)$$

wobei

$$Q_1(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ds \frac{P_1(s)}{z-s} = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1 \quad (z \text{ komplex}) \quad (1.29)$$

die erste Legendrefunktion 2. Art ist (siehe [10]). Da $Q_1(\bar{s})$ im Bereich $\bar{s} > 1$ monoton fallend und positiv ist, kann diese Bedingung - in Abhängigkeit von dem Wechselwirkungsparameter F_0 - nur für ein wohlbestimmtes $\bar{s} = s_d(F_0)$ und nur für positive F_0 erfüllt werden. Dies bedeutet, daß es Nullten Schall in diesem Bereich nur für abstoßende Wechselwirkung gibt, und daß diese Wechselwirkung die Phasengeschwindigkeit auf den durch s_d bestimmten Wert fixiert, was für die Schallgeschwindigkeit c eine lineare Dispersionsrelation, wie sie für Schallwellen charakteristisch ist, zur Folge hat:

$$\omega = s_d v_F q = c q \quad (1.30)$$

s_d und damit ω ist reell, der Nullte Schall ist hier also ungedämpft.

Ist die Wechselwirkung schwach, so geht s_d gegen 1, aber in einer nichtanalytischen Weise, wie man aus folgender, aus (28) abgeleiteten Näherungsformel sieht:

$$s_d - 1 \approx \frac{2}{e^2} e^{-2/F_0} \quad \text{für } F_0 \rightarrow 0 \quad (1.31a)$$

Für starke Wechselwirkung gilt näherungsweise

$$s_d \approx \sqrt{F_0/3} \quad \text{für } F_0 \gg 10 \quad (1.31b)$$

Dieser Fall trifft auf ^3He zu (siehe Tabelle S.18).

Im Fall $|\bar{s}| < 1$ gibt es keinen klar definierten Schwingungsmodus. In der Lösung von (26) tritt ein δ -Anteil auf (siehe Anhang IV):

$$\psi(s) = \frac{1}{2} B(\bar{s}) \frac{P}{\bar{s}-s} + B(\bar{s}) \frac{1-F_0 Q_1(\bar{s})}{F_0 \bar{s}} \delta(\bar{s}-s) \quad (1.32)$$

der eine nichtkollektive, auf der Fermifläche lokalisierte Beimischung repräsentiert. Mit (32) ist (26) identisch erfüllt, es ergibt sich keine (28) entsprechende Bedingung, und es sind alle Werte von $\bar{s}$ aus diesem Bereich zulässig. Man kann auch zeigen, daß hier eine starke sogenannte "Landaudämpfung" auftritt. Wir werden deshalb in diesem Bereich nicht von Nulltem Schall sprechen, sondern diesen Ausdruck für den klar definierten Modus bei $\bar{s} > 1$ reservieren.

Was hier über die Dämpfung gesagt wurde, hat nichts mit der speziellen Wahl der Wechselwirkung in Gl.(26) zu tun. Diese Dämpfungseigenschaften (insbesondere das Fehlen der Dämpfung für Nulltem Schall bei $T = 0$) weist auch die Gl.(22) auf. Für Temperaturen ein wenig über dem absoluten Nullpunkt ist zu erwarten, daß die (seltenen) Stöße zwischen den Quasiteilchen den Nulltem Schall (schwach) dämpfen. Um diese Dämpfung zu beschreiben, muß man das Stoßintegral in Gl.(11) mitnehmen; dies ist das Ziel dieser Arbeit.

4. Der dynamische Formfaktor

Zur Vorbereitung der Lösung der Gleichung mit Stoßintegral in Kap. V wollen wir noch die Gl.(26) unter der Einwirkung einer äußeren Störung diskutieren. Das heißt, wir betrachten die Gleichung

$$(\bar{s}-s)\psi(s) - \frac{F_0}{2} \int_{-1}^1 ds' s' \psi(s') = \frac{1}{2} e^{iX}(\underline{q}, \omega) \quad (1.33)$$

und fragen nach dem daraus abgeleiteten "reduzierten" dynamischen Formfaktor $\sigma(\omega, \underline{q})$ (multipliziert mit der mittleren Dichte ist $\sigma(\omega, \underline{q})$ der dynamische Formfaktor, s.[7]). Dieser enthält alle Informationen über das Anregungsspektrum des Systems und bestimmt deshalb die Antwort des Systems auf die äußere Störung, die als ebene Welle mit der Amplitude $\frac{1}{2} e^{iX}(\underline{q}, \omega)$ angenommen ist. Die Frequenz ω und der Wellenvektor $\underline{q}$ werden jetzt dem System von außen aufgeprägt. Die Störung soll adiabatisch eingeschaltet werden, dazu erhält ω einen infinitesimalen positiven Imaginärteil, d.h.

$$\bar{s} \rightarrow \bar{s} + i\eta, \quad \eta > 0 \quad (1.34)$$

In Kap. IV wird gezeigt, daß dann $\sigma(\omega, \underline{q})$ nur von $\bar{s}$ abhängt und für $T \rightarrow 0$ die Form hat (vgl. (4.33)):

$$\sigma(\omega, \underline{q}) = -3 \frac{\hbar}{\mu} \operatorname{Im} \frac{Q_1(\bar{s} + i\eta)}{1 - F_0 Q_1(\bar{s} + i\eta)}$$

$Q_1(z)$ divergiert bei $z = \pm 1$ und hat auf der reellen Achse im Intervall $[-1, 1]$ einen Schnitt, so daß gilt

$$Q_1(\bar{s} + i\eta) = Q_1(\bar{s}) - i\sqrt{\bar{s}} \Theta(1 - |\bar{s}|) \quad (1.35)$$

wobei Θ die Stufenfunktion ist.

Im Fall $\bar{s} < 1$ (wir betrachten ω als positiv) ergibt sich daher für $\sigma(\omega, \underline{q})$:

$$\sigma(\omega, \underline{q}) = 3 \frac{\hbar}{2\mu} \frac{\pi \bar{s}}{[1 - F_0 Q_1(\bar{s})]^2 + [\frac{F_0 \pi \bar{s}}{2}]^2} \quad (1.36)$$

Dieser Ausdruck ist Null sowohl für $\bar{s} = 0$ als auch für $\bar{s} = 1$, dazwischen muß er ein Maximum haben. Eine detaillierte Diskussion ist aber wegen des transzendenten Charakters von $Q_1(\bar{s})$ recht aufwendig.

Im Fall $\bar{s} > 1$ ergibt sich für kleines, aber noch endliches η :

$$\sigma(\theta, q) = -3 \frac{\hbar}{\mu} \frac{\eta Q_1'(\bar{s})}{[1 - F_0 Q_1(\bar{s})]^2 + \eta^2 F_0^2 Q_1'^2(\bar{s})}$$

Die Ableitung $Q_1'(\bar{s})$ ist negativ für alle $\bar{s} > 1$; im Limes $\eta \rightarrow 0$ erhält man

$$\sigma(\theta, q) = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 + F_0 Q_1(\bar{s}) \\ 3 \frac{\hbar}{\mu} \frac{\pi}{F_0^2 |Q_1'(\bar{s})|} \delta(\bar{s} - s_d) & \text{für } 1 = F_0 Q_1(\bar{s}) \end{cases} \quad (1.37)$$

Der Nullte Schall ist hier also durch das Auftreten einer δ -Funktion im dynamischen Formfaktor, der sonst Null ist, charakterisiert. Bezieht man das Stoßintegral mit ein, so sollte (bei schwacher Dämpfung) die δ -Funktion durch eine kontinuierliche, aber nahe bei $\bar{s} = s_d$ ein ausgeprägtes Maximum aufweisende Funktion ersetzt werden.

5. Parameter für ^3He

Wir schließen Kap. I ab mit der Diskussion einiger wichtiger Parameter der Fermiflüssigkeit ^3He . Dies ist die einzige Fermiflüssigkeit, die in makroskopischen Mengen für das Experiment zur Verfügung steht (1 cm^3 ^3He ist eine typische, in Experimenten verwandte Menge). ^3He wird unter Atmosphärendruck bei 3.2K flüssig und bleibt dies (ebenso wie ^4He) bis zum absoluten Nullpunkt, solange man dem Gefrieren nicht durch Anwendung hoher Drucke nachhilft. Dies ist eine Auswirkung der außerordentlich schwachen Anziehung der Heliumatome, die (bei normalem Druck) durch die Nullpunktsenergie überkompensiert wird. Dem entspricht ein ungewöhnlich großes molares Volumen (bei ^3He das Vierfache des Volumens, das man allein aufgrund der Atomwechselwirkung erwarten würde). Die Eigenschaften von flüssigem Helium sind deshalb stark dichte- bzw. druckabhängig. Wir listen auf der folgenden Seite in tabellarischer Form einige Meßgrößen für flüssiges ^3He , entnommen aus [16], für drei verschiedene Werte des Drucks P auf, nämlich die Massendichte ρ , die daraus abgeleitete Teilchenzahldichte n sowie k_F , die effektive Masse m^* , die Geschwindigkeit auf der Fermifläche v_F , das chemische Potential μ und die daraus abgeleitete Entartungstemperatur T_F , die Schallgeschwindigkeit c, schließlich die Landauparameter $F_0^{(s),(a)}$. Für die Masse $m_{^3\text{He}}$ des ^3He -Atoms wird der Wert $5.009 \cdot 10^{-24}$ g verwendet.

$P[\text{bar}]$	$\rho[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}]$	$n[\frac{10^{22}}{\text{cm}^3}]$	$k_F[\text{\AA}^{-1}]$	$\frac{m^*}{m_{\text{He}}}$	$v[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$	$\mu[\text{meV}]$	$T_F[\text{K}]$	$c[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$	$F_0^{(s)}$	$F_0^{(a)}$
0	.082	1.63	.79	3.01	54.77	.135	1.57	182.9	10.07	-.672
3	.089	1.78	.81	3.42	49.58	.126	1.46	227.5	17.39	-.700
24	.111	2.23	.87	5.39	33.90	.093	1.07	375.1	66.81	-.738

Der Dampfdruck P_{SUP} von ^3He bei verschiedenen Temperaturen ist nach [12]):

$T[\text{K}]$	.2	.3	.5	1.0	2.0	3.2
$P_{\text{SUP}}[\text{bar}]$	1.61(-8)	2.50(-6)	2.12(-4)	1.18(-2)	.200	1.020

Die Eigenschaften von normalen flüssigen ^3He sind bis herunter zu etwa 4mK gemessen, unterhalb dieser Temperatur findet auch für ^3He ein Übergang in die supraflüssige Phase statt.

II. Stoßkinematik und Größenordnungsbetrachtungen

Der Sinn dieses Kapitels liegt darin, physikalische Größen und Parameter sowie Relationen zwischen ihnen einzuführen, die grundlegend sind für die folgenden Kapitel. Es handelt sich dabei insbesondere um die Wellenvektoren $\underline{k}$ (Impulse $\underline{p} = \hbar \underline{k}$) der in einen Stoß verwickelten Quasiteilchen, um die Frequenz ω und den Wellenvektor $\underline{q}$ der äußeren Störung (bzw. der kollektiven Bewegung), um die Temperatur T und um das chemische Potential μ .

Wir untersuchen zunächst den Stoß zweier Fermionen $(k_0, k_1) \rightarrow (k_2, k_3)$ unter folgenden Bedingungen:

- a) starke Entartung: $k_B T \ll \mu$
- b) Pauliblockierung: $(1-n_{k_2})(1-n_{k_3})n_{k_0}n_{k_1}$ als Faktor im Stoßintegral
- c) "schwache" Impulserhaltung: $k_2 + k_3 = k_0 + k_1 + q$
- d) "schwache" Energieerhaltung: $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \hbar\omega$

Der Wellenvektor $\underline{q}$ und die Energie $\hbar\omega$ werden als klein gegenüber den anderen vorkommenden Wellenvektoren und Energien betrachtet, über das Verhältnis von $\hbar\omega$ zu $k_B T$ wird keine Aussage gemacht. Die Verteilungsfunktionen $n_{\underline{k}}$ in b) sind Gleichgewichts-, d.h. Fermiverteilungen. Tatsächlich tritt im Stoßintegral nicht nur der Faktor b), sondern auch der entsprechende "vice-versa" - Term für den reziproken Stoßvorgang $(k_2, k_3) \rightarrow (k_0, k_1)$ auf, und zwar in der Kombination "Gewinn- minus Verlustterm", d.h.

$$(1-n_{k_2})(1-n_{k_3})n_{k_0}n_{k_1} - n_{k_2}n_{k_3}(1-n_{k_0})(1-n_{k_1}) \quad (2.1)$$

Die Faktoren $(1-n_{k_i})$ fehlen im klassischen Boltzmannstoßintegral, sie bewirken, daß nicht in die (wegen a)) fast volle Fermikugel hinein gestreut werden kann und bringen somit das Pauliverbot zum Ausdruck. Setzt man für n die Fermiverteilung ein, so kann man (1) unter Verwendung von d) auf folgende Form bringen

$$(1-n_{k_2})(1-n_{k_3})n_{k_0}n_{k_1} [1 - \exp(-\frac{\hbar\omega}{k_B T})] \quad (2.2)$$

Man sieht, daß das Stoßintegral (das zu (2) proportional ist) im Gleichgewicht, d.h. für $\omega = 0$, verschwindet. Für $\omega \neq 0$ schränkt (2) die Beträge der Impulse so ein, daß

$$k_2 \gtrless k_F, \quad k_3 \gtrless k_F; \quad k_0 \lesseqgtr k_F, \quad k_1 \lesseqgtr k_F \quad (2.3)$$

$\hbar k_F = p_F$ ist der Fermiimpuls. Die Zeichen λ bzw. λ bedeuten, daß die entsprechenden Impulse allenfalls um die halbe Breite der "diffusen" Zone der Fermiverteilung kleiner bzw. größer als k_F sein dürfen, im übrigen aber beliebig größer bzw. kleiner als k_F sein können. Für $T \rightarrow 0$ gehen beide Zeichen in das Gleichheitszeichen über, die ganze Dynamik ist dann (im Gleichgewicht) in Strenge auf die Fermifläche beschränkt. Durch den Energiesatz d) wird das "beliebig größer bzw. kleiner" von oben weiter eingeschränkt, und zwar erhält mit

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m} \quad (2.4)$$

der Energiesatz die Form

$$p_2^2 + p_3^2 = p_0^2 + p_1^2 + 2m\hbar\omega \quad (2.5)$$

woraus mit (3)

$$p_2 \approx p_3 \approx p_0 \approx p_1 \approx p_F \quad (2.6)$$

folgt, solange

$$\hbar\omega \ll \frac{p_F^2}{2m} = \mu \quad (2.7)$$

gilt.

Die Schlußfolgerung in dieser Richtung gilt für freie Teilchen (ein Fermigas), für Quasiteilchen gilt die Dispersionsrelation (4) (mit der Ersetzung $m \rightarrow m^*$) a priori nur innerhalb der diffusen Zone der Fermiverteilung, es ist dann (7) die aus (6) und (5) zu schließende Bedingung dafür, daß das Konzept der Quasiteilchen sinnvoll bleibt.

Zur Präzisierung von (6) stellen wir fest, daß der maximale Fehler, den man macht, wenn man $p_i = p_F$ setzt, von der Größenordnung der halben Breite der diffusen Zone ist. Hierbei geht offensichtlich das Verhältnis von $\hbar\omega$ zu $k_B T$ ein, das wir mit

$$\tau := \frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad (2.8)$$

bezeichnen. Die Rolle dieser Breite wird gemäß (5) von $\hbar\omega$ übernommen, sobald dieses größer als $k_B T$ wird. Die maximale Abweichung $\Delta\varepsilon = k_B T(1+\tau)$ einer Energie nach einer Seite der Fermifläche kann man mit (4) auf eine

maximale Impulsabweichung überspielen, nach Linearisieren in dieser Abweichung und unter Benutzung von (3) erhält man die Beziehungen

$$\left[1 - \frac{k_{BT}}{2\mu}\right] k_F < k_i < k_F \left[1 + (1+\tau) \frac{k_{BT}}{2\mu}\right] =: k_F + \langle \Delta k \rangle_{\max}, \quad i = 2, 3 \quad (2.9a)$$

$$\left[1 - (1+\tau) \frac{k_{BT}}{2\mu}\right] k_F < k_j < k_F \left[1 + \frac{k_{BT}}{2\mu}\right], \quad j = 0, 1 \quad (2.9b)$$

Der Energiesatz läßt allerdings nicht alle nach (9) möglichen Kombinationen zu, vielmehr folgt aus

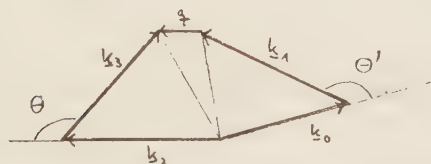
$$k_i =: (1 + \delta_i) k_F, \quad |\delta_i k_F| < \langle \Delta k \rangle_{\max}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.10a)$$

nach Einsetzen in (5) und Linearisieren in δ_i , daß

$$\delta_2 + \delta_3 - \delta_0 - \delta_1 = \frac{\hbar \theta}{2\mu} \quad (2.10b)$$

gelten muß.

Geometrisch gesehen, müssen also alle vier Impulse annähernd eine (nicht notwendig ebene) "Raute" bilden:



Wenn man alle k_i gleich k_F setzt, bedeutet das, daß nach Vorgabe von k_0 und k_1 (q ist von außen festgelegt) für die Vektoren k_2 und k_3 insgesamt noch ein Freiheitsgrad übrigbleibt, nämlich die gemeinsame Drehung um die Achse $k_2 + k_3$.

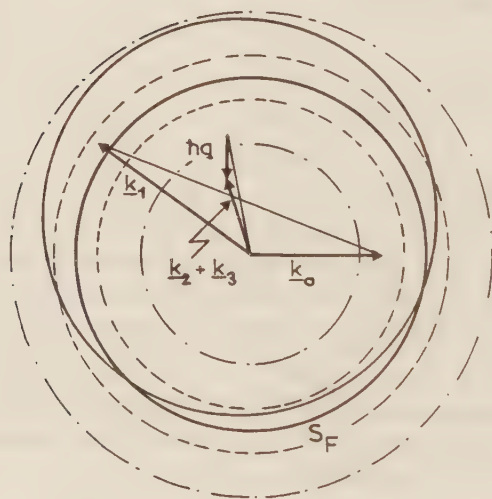
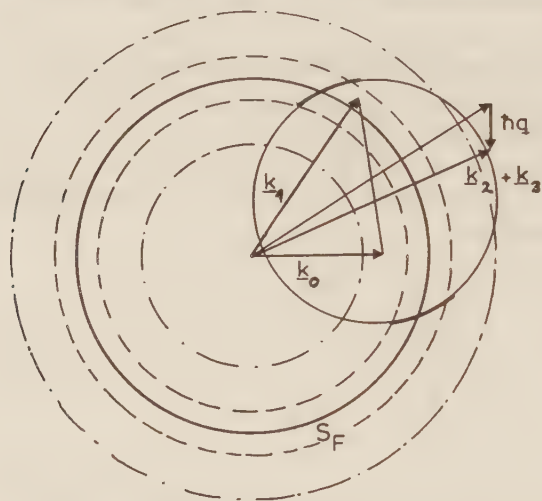
Die Winkel θ und θ' sind ungefähr gleich. Setzt man nämlich (10a) in den Impulssatz ein, so ergibt sich durch Quadrieren, Verwendung von (10b) und (5), und unter Vernachlässigung von q^2 :

$$\cos \theta = \cos \theta' - \frac{\hbar \theta}{\mu} \cos^2 \frac{\theta'}{2} + \frac{1}{k_F} 2q \cdot (k_0 + k_1) \quad (2.11)$$

Für $T = 0$, $\omega = 0$, $q = 0$ geht " $\approx$ " in " $=$ " über. Aus (11) folgt schließlich, daß die Relativimpulse näherungsweise gleich sein müssen:

$$\langle k_2 - k_3 \rangle^2 \approx \langle k_0 - k_1 \rangle^2 - 2q \cdot (k_0 + k_1) + 2 \frac{\hbar \theta}{\mu} k_F^2 \quad (2.12)$$

Dies führt zu folgender Stoßgeometrie im Impulsraum (wir wählen $\hbar\omega = 2k_B T$):



Im oberen Bild ist der Fall großen, im unteren der kleinen Gesamtimpulses dargestellt. Um die Fermifläche S_F sind vier konzentrische Kreise im Abstand von $\pm \frac{k_B T}{2\mu} k_F$ (gestrichelt) und $\pm (\Delta K)_{\max}$ (strichpunktuiert) gezeichnet.

k_0 und k_1 sind so gewählt, daß $-(\Delta k)_{\max} < \delta_0 < -\frac{k_B T}{2\mu} k_F$, $0 < \delta_1 < \frac{k_B T}{2\mu}$.
 $k_2 + k_3$ ist damit durch die Impulserhaltung (Bedingung c) festgelegt. Der Mittelpunkt des Kreises mit dem Durchmesser $|k_2 - k_3|$ gemäß (12) (Differenzenkreis) halbiert den Vektor $k_2 + k_3$ (die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren einander). Die Spitzen der Vektoren k_2 und k_3 müssen auf diesem Kreis liegen und außerdem die Bedingung (9a) erfüllen. Dies ist nur auf dem dick ausgezogenen Bogen des Differenzenkreises möglich.

Man sieht, daß es für kleinen Gesamtimpuls sehr viel mehr freie Endzustände gibt als für großen; die Streuung mit kleinem Gesamtimpuls ist deshalb bevorzugt. Dies ist charakteristisch für ein entartetes Fermionensystem.

Wir wollen abschließend noch eine Beziehung zwischen q, θ, T und der daraus gebildeten normierten Phasengeschwindigkeit

$$\bar{s} := \frac{\theta}{q v_F} \quad (2.13)$$

(mit $v_F = \frac{p_F}{m}$) diskutieren. Per definitionem gilt nämlich

$$\bar{s} \frac{q}{k_F} = \tau \frac{k_B T}{2\mu} = \frac{\hbar \theta}{2\mu} \quad (2.14)$$

Für Nullten Schall liegt $\bar{s}$ in einem weiten Druckbereich bei 2 oder etwas darüber, sodaß sich aus (14) die Relationen

$$\frac{\mu}{k_B T} \frac{q}{k_F} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \ll 1 & \tau < 1 \\ \gg 1 & \tau > 1 \end{array} \right. \quad \text{für} \quad (2.15)$$

ergeben.

III. Bewegungsgleichung für die Dichtematrix

Für die Beschreibung des Systems homogener Fermionen verwenden wir den Formalismus der zweiten Quantisierung. Wir gehen aus von den Feldoperatoren im Heisenbergbild

$$\psi(\underline{r}, t) = e^{i\frac{Ht}{\hbar}} \psi(\underline{r}) e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \quad (3.1)$$

verschaffen uns Bewegungsgleichungen für die Einteilchen-Greenfunktion

$$g(\underline{r}, t, \underline{r}', t') = -i \langle T \psi(\underline{r}, t) \psi^\dagger(\underline{r}', t') \rangle \quad (3.2)$$

(T ist der Zeitordnungsoperator) und erhalten daraus die Bewegungsgleichung für die Dichtematrix ρ

$$iN\rho(\underline{r}, \underline{r}', t) = \lim_{t' \rightarrow t+0} g(\underline{r}, t; \underline{r}', t') \quad (3.3)$$

(N ist die Teilchenzahl des Systems)

Diese Gleichung enthält auch die Zweiteilchen-Greenfunktion. Deren Behandlung sowie ein verallgemeinerter RPA-Ansatz für die Dichtematrix sind die entscheidenden Schritte.

Die Bewegungsgleichung der Feldoperatoren ist nach Heisenberg gegeben durch

$$i\hbar \partial_t \psi(\underline{r}, t) = [\psi(\underline{r}, t), H] \quad (3.4)$$

wobei der Hamiltonoperator H , eine Zweiteilchenwechselwirkung enthält:

$$H = \int d^3r \psi^\dagger(\underline{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right) \psi(\underline{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \psi^\dagger(\underline{r}) \psi^\dagger(\underline{r}') V(\underline{r}, \underline{r}') \psi(\underline{r}') \psi(\underline{r}) \quad (3.5)$$

Das Zweiteilchenpotential $V(\underline{r}, \underline{r}')$ ist symmetrisch und hängt im homogenen System nur von der Differenz $\underline{r} - \underline{r}'$ ab:

$$V(\underline{r}, \underline{r}') = V(\underline{r} - \underline{r}') = V(\underline{r}' - \underline{r}) \quad (3.6)$$

Außerdem ist es reell und soll (wie schon im ersten Kapitel diskutiert) spinunabhängig sein.

Unter Verwendung der Antikommutatorbeziehungen der Feldoperatoren

$$\langle \psi(\underline{r}, t), \psi(\underline{r}', t) \rangle = \langle \psi^\dagger(\underline{r}, t), \psi^\dagger(\underline{r}', t) \rangle = 0, \quad \langle \psi(\underline{r}, t), \psi^\dagger(\underline{r}', t) \rangle = \delta(\underline{r} - \underline{r}') \quad (3.7)$$

erhält man aus (4) und (5) zunächst

$$i\hbar \partial_t \psi(\underline{r}, t) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(\underline{r}, t) + [sd^3 r' \psi^\dagger(\underline{r}', t) U(\underline{r} - \underline{r}') \psi(\underline{r}', t)] \psi(\underline{r}, t) \quad (3.8a)$$

$$i\hbar \partial_t \psi^\dagger(\underline{r}', t') = +\frac{\hbar^2 \nabla'^2}{2m} \psi^\dagger(\underline{r}', t') - \psi^\dagger(\underline{r}', t') sd^3 r \psi^\dagger(\underline{r}, t') U(\underline{r} - \underline{r}') \psi(\underline{r}, t') \quad (3.8b)$$

Multiplikation von (8a) mit $\psi^\dagger(\underline{r}', t')$ von links, bzw. von (8b) mit $\psi(\underline{r}, t)$ von rechts liefert die Bewegungsgleichungen für die Einteilchen-Greenfunktion (es sei $\langle 1 \rangle \equiv \langle \underline{r}_1, t_1 \rangle$ etc):

$$(i\hbar \partial_{t_1} + \frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m}) g^{(1,1')} = -i sd^3 r_2 U(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) g^{(2)}(1, 2; 1', 2') \quad (3.9a)$$

$$\text{mit } t_2 = t_1 < t_1', \quad t_2' = t_2' \equiv t_2 + 0, \quad \underline{r}_2' = \underline{r}_2$$

$$(i\hbar \partial_{t_1} - \frac{\hbar^2 \nabla_1'^2}{2m}) g^{(1,1')} = +i sd^3 r_2 U(\underline{r}_1' - \underline{r}_2) g^{(2)}(1, 2; 1', 2') \quad (3.9b)$$

$$\text{mit } t_1 < t_1' = t_2', \quad t_2 = t_2' - 0, \quad \underline{r}_2' = \underline{r}_2$$

Die Zweiteilchen-Greenfunktion $g^{(2)}(1, 2; 1', 2')$ ist definiert als

$$g^{(2)}(1, 2; 1', 2') = (-i)^2 \langle T \psi(\underline{r}_1, t_1) \psi(\underline{r}_2, t_2) \psi^\dagger(\underline{r}_2', t_2') \psi^\dagger(\underline{r}_1', t_1') \rangle \quad (3.10)$$

und die Einteilchen-Greenfunktion spaltet folgendermaßen auf:

$$g(\underline{r}_1, t_1; \underline{r}_1', t_1') = \begin{cases} i \langle \psi^\dagger(\underline{r}_1', t_1') \psi(\underline{r}_1, t_1) \rangle =: g^{(1,1')} & \text{für } t_1 < t_1' \\ -i \langle \psi(\underline{r}_1, t_1) \psi^\dagger(\underline{r}_1', t_1') \rangle =: g^{(1,1')} & \text{für } t_1 > t_1' \end{cases} \quad (3.11)$$

Der Erwartungswert ist als Ensemblemittelung zu verstehen. Die gesuchte Gleichung für die Dichtematrix erhält man (bis auf Faktoren) durch Addieren

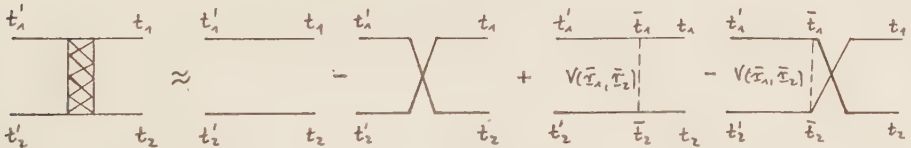
von (9a) und (9b) und den Grenzübergang $t_1' \rightarrow t_1^+ =: t_1^+$

$$\begin{aligned} & [i\kappa\partial_t + \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \nabla'^2}{2m}] g^{(2)}(\underline{r}, t; \underline{r}', t^+) = \\ & = -i \int d^3r_2 [V(\underline{r} - \underline{r}_2) - V(\underline{r}' - \underline{r}_2)] g^{(2)}(\underline{r}, t, \underline{r}_2, t; \underline{r}', t^+, \underline{r}_2, t^+) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hierbei wurde verwendet, daß

$$\lim_{t_1' \rightarrow t_1^+} [i\kappa\partial_{t_1} + i\kappa\partial_{t_1'}] g^{(1,1')} = i\kappa\partial_t g^{(1,1')}(\underline{r}_1, t, \underline{r}_1', t^+)$$

Diese Gleichung koppelt die Einteilchen-Greenfunktion an die Zweiteilchen-Greenfunktion. Letztere enthält die Wechselwirkung der zwei Teilchen in allen Ordnungen (diese Tatsache ermöglicht die Aufstellung der sog. Martin-Schwinger - Hierarchie, in der die N-Teilchen - Greenfunktion an die für (N+1)-Teilchen gekoppelt ist; Gl.(12) ist die erste Gleichung dieser Hierarchie). Um eine geschlossene Gleichung für die Einteilchen-Greenfunktion zu erhalten, entwickeln wir diese Wechselwirkung nach sog. "Leitergraphen", und zwar genügt uns die erste Ordnung. Graphisch läßt sich das so darstellen:



Dem entspricht

$$\begin{aligned} g^{(2)}(1,2;1',2') & \approx g(1,1')g(2,2') - g(1,2')g(2,1') + \\ & + \frac{1}{\hbar} \int d\bar{I} d\bar{Z} g(1,\bar{I})g(2,\bar{Z}) V(\bar{I},\bar{Z}) g(\bar{I},1')g(\bar{Z},2') - \\ & - \frac{1}{\hbar} \int d\bar{I} d\bar{Z} g(1,\bar{Z})g(2,\bar{I}) V(\bar{I},\bar{Z}) g(\bar{I},1')g(\bar{Z},2') \end{aligned} \quad (3.13)$$

wobei $d\bar{I} := d^4\bar{x}_1 \equiv d^3\bar{r}_1 d\bar{t}_1$ bedeutet, ferner betrachten wir eine instantane Wechselwirkung

$$V(1,2) = V(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \delta(t_1 - t_2) \quad (3.14)$$

Der erste Term in (3.13) (mit Austauschterm) ist unter dem Namen Gorkov-Faktorisierung bekannt. Er liefert - zusammen mit dem Potential, das in (12) vor $g^{(2)}$ steht - zwei "mittlere Feld"-Terme. Mit ihm allein erhielte man modifizierte, zeitabhängige Hartree-Fock - Gleichungen [8]. Der letzte Term (mit Austauschterm), d.h. der erste Leitergraph, enthält die Stöße zwischen den Teilchen (in niedrigster Ordnung), er wird in unserer Gleichung das Stoßintegral liefern.

In (12) eingesetzt, ergeben sich die Terme des mittleren Felds zu:

$$\begin{aligned}
 & -i \int d^3r_2 V(\underline{r}, \underline{r}_2) [g^{<}(\underline{r}, t; \underline{r}', t^+) g^{<}(\underline{r}_2, t; \underline{r}_2, t^+) - \\
 & - g^{<}(\underline{r}, t; \underline{r}_2, t^+) g^{<}(\underline{r}_2, t; \underline{r}', t^+)] =: u(\underline{r}, t) g^{<}(\underline{r}, t; \underline{r}', t^+) \quad (3.15a)
 \end{aligned}$$

Außerdem tritt noch der analoge Term $u(\underline{r}', t)$ auf, der $V(\underline{r}', \underline{r}_2)$ enthält. Mit den kinetischen Termen der linken Seite von Gleichung (12) kann man diese Terme zu Einteilchen-Hamiltonoperatoren zusammenfassen:

$$h(\underline{r}, t) := -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + u(\underline{r}, t) \quad (3.15b)$$

Damit nimmt Gleichung (12) die Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 & [i\hbar \partial_t - (h(\underline{r}, t) - h(\underline{r}', t))] g^{<}(\underline{r}, t; \underline{r}', t^+) = \\
 & = \frac{1}{\hbar} \int \int d^3r_2 d^3\bar{r}_1 d^3\bar{r}_2 \int d\bar{t} [V(\underline{r}, \underline{r}_2) - V(\underline{r}', \underline{r}_2)] \cdot \\
 & \quad \cdot [g(\underline{1}, \bar{t}) g(\underline{2}, \bar{t}) - g(\underline{1}, \bar{t}) g(\underline{2}, \bar{t})] V(\underline{r}_1, \bar{r}_2) g(\underline{1}, \bar{t}) g(\underline{2}, \bar{t}) \\
 & \quad \text{mit } t_1 = t_2 =: t, \quad t_1' = t^+, \quad \bar{t}_1 = \bar{t}_2 =: \bar{t}, \quad \bar{r}_2' = \bar{r}_2 \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, daß $g(\underline{r}, t; \underline{r}', t^+)$ wirklich von der Zeit t und nicht nur der Zeitdifferenz $t - t^+$ (die hier Null wäre) abhängt; diese Abhängigkeit überträgt sich auf $u(\underline{r}, t)$ und $h(\underline{r}, t)$. Der Grund dafür ist, daß wir Schwingungen des Systems um den Grundzustand und deren Dämpfung betrachten, die die Homogenität in der Zeit zerstören.

Vernachlässigt man die rechte Seite von Gl.(16) - die als Stoßintegral interpretiert wird - so erhält man (mit einem geeigneten Schwingungsansatz für $g^{<}$) die bekannten RPA-Gleichungen mit einer reellen Frequenz für die kollektive Schwingung. Diese kann man verstehen als eine

Kohärente Superposition von $1p-1h$ - Anregungen (die Gorkov-Faktorisierung projiziert aus der Zweiteilchenwechselwirkung $V(\underline{r}, \underline{r}')$ gerade den "Einteilchenanteil" heraus). Die $1p-1h$ - Anregungen koppeln aber an Anregungen mit größeren Teilchen-Loch - Zahlen (vgl. Gl.(12)), was sich auf die kollektive Schwingung als "Reibung" auswirkt und zu Dämpfung führt. Das Stoßintegral in (16) enthält die niedrigste Ordnung dieser höheren Anregungen, nämlich $2p-2h$ - Anregungen (bedingt durch das Auftreten von Produkten wie $V(\underline{r}, \underline{r}_2) V(\underline{r}_1, \underline{r}_2)$).

Zur Auswertung des Stoßintegrals ist die Wahl des Weges für die Zeitintegration wesentlich. Wir wählen im Anschluß an [5] den Integrationsweg folgendermaßen: von $\bar{t} = -\infty + i\varepsilon$ bis $\bar{t} = t + i\varepsilon$ und zurück von $\bar{t} = t - i\varepsilon$ bis $\bar{t} = -\infty - i\varepsilon$ mit dem infinitesimalen Imaginärteil $\varepsilon > 0$. Durch diese Wahl wird sichergestellt, daß in jedem Integrationsabschnitt aus den Stößen Dämpfung resultiert (wie es physikalisch sein muß). Damit wird das Stoßintegral:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hbar} \iiint d^3r_2 d^3r_1 d^3r_2 \int_{-\infty}^t d\bar{t} [V(\underline{r}, \underline{r}_2) - V(\underline{r}', \underline{r}_2)] \cdot \\ & \cdot \{ [g^>(1, \bar{t}) g^>(2, \bar{t}) - g^>(1, \bar{t}) g^>(2, \bar{t})] V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) g^<(\bar{t}, 1') g^<(\bar{t}, 2') - \\ & - [g^<(1, \bar{t}) g^<(2, \bar{t}) - g^<(1, \bar{t}) g^<(2, \bar{t})] V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) g^>(\bar{t}, 1') g^>(\bar{t}, 2') \} \end{aligned} \quad (3.17)$$

nach wie vor mit $t_1=t_2=t$, $\bar{t}_1=\bar{t}_2=\bar{t}$, sowie $t_1 = \begin{cases} t^+ \\ t^- \end{cases}$ in $g^<_g$.

Der nächste wesentliche Schritt ist ein Ansatz für die Einteilchen-Greenfunktionen $g^<$ und $g^>$. Vorher soll jedoch - im Vorgriff auf die spätere Fragestellung - kurz diskutiert werden, wie eine äußere Störung (ein lokales externes Potential $V^{ex}(\underline{r}, t)$) in die Gl.(16) eingeht.

Im Formalismus der zweiten Quantisierung liefert ein externes Potential folgenden Beitrag zum Hamiltonoperator:

$$H^{ex}(t) = \int d^3r \psi^\dagger(\underline{r}, t) V^{ex}(\underline{r}, t) \psi(\underline{r}, t) \quad (3.18)$$

Die Zeitabhängigkeit von ψ wird jetzt durch die Summe aus (5) und H^{ex} beschrieben:

$$i\hbar \partial_t \psi(\underline{r}, t) = [\psi(\underline{r}, t), H + H^{ex}(t)] \quad (3.19)$$

Der Kommutator mit H^{ex} liefert $V^{\text{ex}}(\underline{r}, t) \psi(\underline{r}, t)$. In der Bewegungsgleichung für $\psi^{\dagger}(\underline{r}', t')$ tritt ein analoger Term auf, so daß sich für die linke Seite von Gl.(16) ergibt:

$$[i\hbar \partial_t - (h(\underline{r}, t) - h(\underline{r}', t)) - (V^{\text{ex}}(\underline{r}, t) - V^{\text{ex}}(\underline{r}', t))] g^{\dagger}(\underline{r}, t; \underline{r}', t^*) \quad (3.20)$$

Der Ansatz für die Greenschen Funktionen soll sowohl Schwingungen um den HF-Grundzustand (das entspricht einer zeitabhängigen unitären Transformation der Einteilchenbasisfunktionen) als auch Änderungen der Besetzungszahlen ermöglichen. Die Einteilchen-Greenfunktion hat im Raum der Besetzungszahlen die Gestalt

$$g^{\dagger}(\underline{r}, t, \underline{r}', t') = i \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}(\underline{r}) f_{\alpha\beta}^{\dagger}(t, t') \psi_{\beta}^*(\underline{r}') \quad (3.21)$$

mit den Einteilchenwellenfunktionen $\psi_{\alpha}(\underline{r})$ und den zeitabhängigen "Besetzungszahlmatrizen" $f^{\dagger}(t, t')$. Der Index α bzw. β symbolisiert ein Duplett aus einer "dynamischen" Quantenzahl (wir werden dafür den Impuls wählen) und der Spinquantenzahl, die die Werte $\pm 1/2$ annehmen kann. Für die Besetzungszahlmatrizen wird die gleiche Form gewählt wie in [9]:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{\dagger}(t, t') &= \delta_{\alpha\beta} n_{\alpha} e^{-i\epsilon_{\alpha}(t-t')} \cdot \\ &\cdot [1 + w_{\alpha}^*(e^{-i\epsilon_{\alpha}t} + e^{-i\epsilon_{\alpha}t'}) + w_{\alpha}(e^{i\epsilon_{\alpha}^*t} + e^{i\epsilon_{\alpha}^*t'})] + \\ &+ C_{\alpha\beta}^+ [n_{\beta} e^{-i\epsilon_{\alpha}t} e^{-i\epsilon_{\beta}(t-t')} - n_{\alpha} e^{-i\epsilon_{\alpha}t'} e^{-i\epsilon_{\alpha}(t-t')}] - \\ &- C_{\alpha\beta} [n_{\beta} e^{i\epsilon_{\alpha}^*t} e^{-i\epsilon_{\beta}(t-t')} - n_{\alpha} e^{i\epsilon_{\alpha}^*t'} e^{-i\epsilon_{\alpha}(t-t')}] \end{aligned} \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{\dagger}(t, t') &= \delta_{\alpha\beta} e^{-i\epsilon_{\alpha}(t-t')} \cdot \\ &\cdot \{ (1-n_{\alpha}) - n_{\alpha} [w_{\alpha}^*(e^{-i\epsilon_{\alpha}t} + e^{-i\epsilon_{\alpha}t'}) + w_{\alpha}(e^{i\epsilon_{\alpha}^*t} + e^{i\epsilon_{\alpha}^*t'})] \} + \\ &+ C_{\alpha\beta}^+ [(1-n_{\beta}) e^{-i\epsilon_{\alpha}t} e^{-i\epsilon_{\beta}(t-t')} - (1-n_{\alpha}) e^{-i\epsilon_{\alpha}t'} e^{-i\epsilon_{\alpha}(t-t')}] - \\ &- C_{\alpha\beta} [(1-n_{\beta}) e^{i\epsilon_{\alpha}^*t} e^{-i\epsilon_{\beta}(t-t')} - (1-n_{\alpha}) e^{i\epsilon_{\alpha}^*t'} e^{-i\epsilon_{\alpha}(t-t')}] \end{aligned} \quad (3.22b)$$

In diesem Ansatz ist $\varepsilon_\alpha := \hbar\omega_\alpha$ die Energie des HF-Zustandes α , ψ_α ist die zugehörige Wellenfunktion und n_α die zugehörige Besetzungszahl (Verteilungsfunktion) im Gleichgewicht. $n_\alpha = n(\varepsilon_\alpha)$ bezeichnet hier das globale Gleichgewicht, wohingegen in der Landautheorie um ein lokales, durch $n(\vec{p}; \vec{r}, t)$ beschriebenes Gleichgewicht entwickelt wird. Aus der Lösung der Gleichung 0. Ordnung (mit Stoßintegral) wird sich erweisen, daß n_α die Fermiverteilung ist. $n_\alpha \omega_\alpha^*$ ist eine "diagonale" Nichtgleichgewichtskorrektur der Verteilung n_α , die - ebenso wie die "nichtdiagonale" Korrektur, die mit den C^+ -Termen verknüpft ist - mit der Frequenz ω schwingen kann. Um ein definiertes Hermitizitätsverhalten zu erreichen, wurden jeweils die hermitesch konjugierten Terme (mit ω_α bzw. $C_{\alpha\beta}$) hinzugefügt. Die komplexe Frequenz ω kann entweder als Energieeigenwert der kollektiven Schwingung bestimmt werden (in diesem Fall wird der Imaginärteil durch das Stoßintegral geliefert) oder im Sinne einer Antworttheorie durch die äußere Störung festgelegt sein (in diesem Fall entspricht der Imaginärteil dem An- oder Abschalten der Störung). Der Ansatz (22) ist insofern in den Änderungen der Besetzungszahlen n_α linearisiert, als man ihn sich aus einer Transformation der HF-Greenfunktion hervorgegangen vorstellen kann, die die Form hat

$$g(1,1') = U(t) g_{HF} U^\dagger(t')$$

$$\text{mit } U(t) = \exp[e^{-i\omega t} C^+ - e^{i\omega^* t} C] \exp[e^{-i\omega t} W^+ + e^{i\omega^* t} W]$$

$$\text{und } C^+ = \sum_{\alpha\beta} (C^+)_{\alpha\beta} a_\alpha^\dagger a_\beta =: \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}^+ a_\alpha^\dagger a_\beta, \quad W^+ = \sum_{\alpha} \omega_\alpha^* a_\alpha^\dagger a_\alpha \quad (3.23)$$

(22) entsteht dann durch Entwicklung von $\exp[\dots]$ und Vernachlässigung von quadratischen und höheren Gliedern in $C_{\alpha\beta}^+$ und ω_α^* . In diesem Sinn kann man die C^+ -Terme als einen RPA-Ansatz verstehen, der insofern verallgemeinert ist, als die Summationen über α und β alle, d.h. besetzte und unbesetzte, Zustände umfassen. Die diagonalen Korrekturen gehen über RPA hinaus. Es sei noch bemerkt, daß dieser Ansatz die Bedingung

$$g^>(\underline{r}, t^+, \underline{r}', t) - g^<(\underline{r}, t, \underline{r}', t^+) = i\delta(\underline{r} - \underline{r}') \quad (3.24)$$

erfüllt, die aufgrund der Definition (11) gelten muß.

Wir setzen jetzt den Ansatz (22) in die Gleichung (16) mit dem

Stoßintegral (17) ein. Wir projizieren von links mit $\psi_{\lambda}^*(\underline{r}) = \langle \lambda | \underline{r} \rangle$ und von rechts mit $\psi_{\mu}(\underline{r}') = \langle \underline{r}' | \mu \rangle$, d.h. wir bilden das Matrixelement zwischen den Zuständen $|\lambda\rangle$ und $|\mu\rangle$, und betrachten zunächst die linke Seite von Gl.(16). Zur Vereinfachung der Formeln und weil auch in den folgenden Rechnungen Terme, die nichtlinear in den Korrekturen der Besetzungszahlen sind, vernachlässigt werden, schreiben wir nur die Terme in C^+ und w^* auf (diese sind mit der "positiven" Frequenz $e^{-i\omega t}$ verknüpft). Die analogen Terme in C und w (die mit der "negativen" Frequenz $e^{i\omega t}$ verknüpft sind) werden mit "nF" abgekürzt. In dieser Schreibweise ist also z.B. $f_{\alpha\beta}^{\langle}(t, t^+)$:

$$f_{\alpha\beta}^{\langle}(t, t^+) = f_{\alpha\beta}^{\langle}(t, t) = \delta_{\beta\alpha} n_{\alpha} [1 + 2w_{\alpha}^* e^{-i\omega t}] + \\ + (n_{\beta} - n_{\alpha}) C_{\alpha\beta}^+ e^{-i\omega t} + nF \quad (3.25)$$

Die allgemeine Regel ist, daß die w -Terme das gleiche, die C -Terme das entgegengesetzte Vorzeichen haben wie die entsprechenden Terme "positiver" Frequenz.

Für die linke Seite von Gl.(16) ergibt sich damit:

$$\langle \lambda | \dot{S} | \mu \rangle = i\hbar \omega [2\delta_{\lambda\mu} n_{\mu} w_{\mu}^* + (n_{\mu} - n_{\lambda}) C_{\lambda\mu}^+] e^{-i\omega t} + nF - \\ - i\sum_{\alpha} \langle \lambda | h | \alpha \rangle f_{\alpha\mu}^{\langle}(t, t) - f_{\lambda\alpha}^{\langle}(t, t) \langle \alpha | h | \mu \rangle \quad (3.26)$$

Die erste Zeile enthält keine Terme ohne w^* oder C^+ , d.h. keine Terme "0. Ordnung", die zweite Zeile wird mit (25):

$$i\langle \lambda | h | \mu \rangle [(n_{\mu} - n_{\lambda}) + 2e^{-i\omega t} (n_{\mu} w_{\mu}^* - n_{\lambda} w_{\lambda}^*)] + \\ + i\sum_{\alpha} \langle \lambda | h | \alpha \rangle (n_{\mu} - n_{\alpha}) C_{\alpha\mu}^+ - (n_{\alpha} - n_{\lambda}) C_{\lambda\alpha}^+ \langle \alpha | h | \mu \rangle e^{-i\omega t} + nF$$

In 0. Ordnung ist also

$$\langle \lambda | \dot{S} | \mu \rangle = -i\langle \lambda | h_{MHF} | \mu \rangle (n_{\mu} - n_{\lambda})$$

Dabei ist h_{MHF} der Anteil 0. Ordnung des in (15b) definierten Einteilchen-Hamiltonoperators. Dieser modifizierte HF-Operator kommutiert mit der 0. Ordnung der Dichtematrix und kann deshalb gemeinsam mit ihr diagonalisiert

werden. Die Einteilchenbasis $\{\varphi_\alpha\}$ und die Energien $\varepsilon_\alpha = \hbar\omega_\alpha$, die in den Ansatz (21) mit (22) eingehen, sind dadurch definiert. Bei Vernachlässigung des Stoßintegrals resultieren modifizierte Hartree-Fock - Gleichungen:

$$(\lambda|h_{MHF}|\mu)(n_\mu - n_\lambda) = 0$$

Mit Gl.(15a) und (25) ergibt sich für das Matrixelement des mittleren Feldes $u(\underline{r}, t)$

$$\begin{aligned} \langle \lambda | u(\underline{r}, t) | \alpha \rangle &= 2 \sum_{\gamma \delta} f_{\gamma \delta}(t, t) \langle \lambda \delta | V | \alpha \gamma \rangle_A = \\ &= 2 \sum_{\gamma} n_{\gamma} [1 + 2 w_{\gamma}^* e^{-i\theta_{\gamma} t}] \langle \lambda \gamma | V | \alpha \gamma \rangle_A + \\ &\quad + 2 \sum_{\gamma \delta} (n_{\delta} - n_{\gamma}) C_{\gamma \delta}^+ e^{-i\theta_{\gamma} t} \langle \lambda \delta | V | \alpha \gamma \rangle_A + n_F \end{aligned} \quad (3.27a)$$

mit dem voll antisymmetrisierten Potentialmatrixelement

$$\langle \lambda \delta | V | \alpha \gamma \rangle_A = \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' [\psi_{\lambda}^*(\underline{r}) \psi_{\delta}^*(\underline{r}') - \psi_{\delta}^*(\underline{r}) \psi_{\lambda}^*(\underline{r}')] V(\underline{r}, \underline{r}') \varphi_{\alpha}(\underline{r}) \varphi_{\gamma}(\underline{r}') \quad (3.28)$$

Die kinetische Energie $-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m}$ ist diagonal, da im homogenen System aufgrund der Translationsinvarianz der Impuls eine gute Quantenzahl ist. Wir schreiben

$$\langle \lambda | -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} | \alpha \rangle = t_{\lambda} \delta_{\lambda \alpha} \quad (3.27b)$$

Damit wird das Matrixelement des Einteilchen-Hamiltonoperators (15b):

$$\langle \lambda | h(\underline{r}, t) | \alpha \rangle = t_{\lambda} \delta_{\lambda \alpha} + \langle \lambda | u(\underline{r}, t) | \alpha \rangle \quad (3.29a)$$

Setzt man nur die 0. Ordnung von $\langle \lambda | u | \alpha \rangle$ ein, so erhält man die Matrixelemente von h_{MHF} :

$$\langle \lambda | h_{MHF} | \alpha \rangle = [t_{\lambda} + 2 \sum_{\gamma} n_{\gamma} \langle \lambda \gamma | V | \lambda \gamma \rangle_A] \delta_{\lambda \alpha} =: \varepsilon_{\lambda} \delta_{\lambda \alpha} \quad (3.29b)$$

ε_λ hat die Bedeutung einer effektiven kinetischen Energie eines Teilchens mit dem Impuls p_λ im mittleren Feld $u(\underline{r}, t)$. In Analogie zu Kapitel I können wir eine effektive Masse m^* einführen und schreiben

$$\varepsilon_\lambda \delta_{\lambda\mu} := (\lambda^2 - \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m^*}) \quad (3.30a)$$

Der Selbstenergiebeitrag $2\Sigma_\gamma(\lambda\gamma|\nu|\lambda\gamma)_A$, dessen Graph eine einzige Schleife enthält



(3.30b)

ist dadurch in der Renormierung der Masse aufgegangen. Die so definierten Quasiteilchen sind allerdings mit denen aus Kapitel I nicht identisch.

Wenn man in den Potentialmatrixelementen die Impulserhaltung sowie die Spin-erhaltung beim Stoß (die aus der postulierten Spinunabhängigkeit der Wechselwirkung folgt) ausnützt, welche besagt, daß z.B. $(\lambda\delta|\nu|\mu\gamma)$ nur dann von Null verschieden sein kann, wenn $\lambda+\delta = \mu+\gamma$ gilt, so erhält man schließlich für die linke Seite

$$\begin{aligned} (\lambda|\delta.S|\mu) = & \{ \pi a [2\delta_{\lambda\mu} n_\mu w_\mu^* + \langle n_\mu - n_\lambda \rangle C_{\lambda\mu}^+] - (\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu) \langle n_\mu - n_\lambda \rangle C_{\lambda\mu}^+ - \\ & - \langle n_\mu - n_\lambda \rangle 2 \sum_{\gamma\delta} \langle n_\delta - n_\gamma \rangle C_{\gamma\delta}^+ (\lambda\delta|\nu|\mu\gamma)_A \} i e^{-i\omega t} + nF \end{aligned} \quad (3.31)$$

Man beachte, daß die linke Seite keine Terme 0. Ordnung mehr enthält!

Vom Stoßintegral (17) wollen wir hier nur die Zeitintegrationen diskutieren, die sich ergeben, wenn man den Ansatz (22) einsetzt. Dabei treten die folgenden beiden Integrale auf:

$$\int_{-\infty}^t d\bar{t} e^{i(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma - \omega_\delta)(\bar{t} - t)} \quad (3.32a)$$

$$e^{-i(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma - \omega_\delta)t} \int_{-\infty}^t d\bar{t} e^{i(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma - \omega_\delta - \omega)\bar{t}} \quad (3.32b)$$

wobei über die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ summiert wird.

Das Integral (32a) tritt sowohl in der 0. Ordnung als auch bei den w^* - und C^+ -Termen auf (bei diesen steht noch der Faktor $e^{-i\omega t}$ davor), das Integral (32b) tritt in 0. Ordnung nicht auf. Wir machen jetzt die Annahme, daß die Einteilchenenergien eine infinitesimale Breite haben derart, daß $\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma - \omega_\delta \rightarrow \omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma - \omega_\delta - i\eta$. Damit können wir (32a) berechnen und erhalten:

$$\int_{-\infty}^t d\bar{t} e^{i(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma - \omega_\delta - i\eta)(\bar{t} - t)} = -i\pi \left[\frac{P}{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta} + \pi\delta(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta) \right] \quad (3.33a)$$

P bedeutet den Cauchy'schen Hauptwert.

Im Integral (32b) tritt die komplexe Frequenz $\omega = \omega' + i\omega''$ (ω', ω'' reell) auf. Wir nehmen jedoch an, daß $|\omega''| \ll |\omega'|$ gilt, so daß auch hier das Zeitintegral näherungsweise in einen Hauptwert- und einen δ -Anteil aufgespalten werden kann. Unter dem Aspekt der Antworttheorie betrachtet, wo ω die Frequenz der äußeren Störung ist, setzen wir ohnedies $\omega = \omega' + i\eta$; das entspricht "adiabatischem Einschalten" der äußeren Störung (auch beim Eigenwertproblem ist diese Annahme gerechtfertigt, wie aus Kapitel V.2 hervorgeht). Wir erhalten also für Integral (32b):

$$e^{-i(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma - \omega_\delta)t} \int_{-\infty}^t d\bar{t} e^{i(\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\gamma - \omega_\delta - \omega)\bar{t}} = -i\pi e^{-i\omega t} \left[\frac{P}{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta - \hbar\omega'} + \pi\delta(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta - \hbar\omega') \right] \quad (3.33b)$$

Der Hauptwertanteil ist in beiden Fällen mit dem gleichen Vorfaktor i behaftet wie auch die linke Seite (vgl. Gl.(31)). Man könnte ihn also zur linken Seite schlagen und dort als einen weiteren Beitrag in irgendeiner Form mit verarbeiten. Der wesentlich neue Beitrag des Stoßintegrals ist dagegen der δ -Funktionsanteil. Bevor wir aber das Problem des Hauptwertanteils weiterbehandeln, betrachten wir die gesamte Gleichung und nützen aus, daß sie in drei voneinander unabhängige Gleichungen zerfällt. Nach Ausführen der Zeitintegration ist das Stoßintegral (17):

$$\langle \lambda | (17) | \mu \rangle =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\hbar} \sum_{\alpha \beta \gamma \delta} \sum_{\alpha' \beta' \gamma' \delta'} [(\lambda \delta' | V | \alpha' \beta') A_{\gamma' \mu}^{*} - (\gamma' \delta' | V | \mu \beta') A_{\lambda \alpha'}^{\delta}] (\alpha \beta | V | \gamma \delta) A \\
 &\cdot \{ \delta_{\alpha' \alpha} \delta_{\beta' \beta} \delta_{\gamma \gamma'} \delta_{\delta \delta'} [(1-n_{\alpha})(1-n_{\beta}) n_{\gamma} n_{\delta} - \nu \nu] \cdot \\
 &\quad \cdot [-i \hbar \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta}} + \pi \hbar \delta(\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta})] + \\
 &\quad + \delta_{\alpha' \alpha} \delta_{\beta' \beta} \delta_{\gamma \gamma'} \delta_{\delta \delta'} \cdot \\
 &\quad \cdot [(n_{\alpha} n_{\beta} (1-n_{\gamma}) + \nu \nu) n_{\delta} \omega_{\delta}^{*} + (n_{\alpha} n_{\beta} (1-n_{\delta}) + \nu \nu) n_{\gamma} \omega_{\gamma}^{*} - \\
 &\quad - ((1-n_{\alpha}) n_{\gamma} n_{\delta} + \nu \nu) n_{\beta} \omega_{\beta}^{*} - ((1-n_{\beta}) n_{\gamma} n_{\delta} + \nu \nu) n_{\alpha} \omega_{\alpha}^{*}] \cdot \\
 &\quad \cdot [-i \hbar \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} - \hbar \omega} + \pi \hbar \delta(\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} - \hbar \omega)] - \\
 &\quad - i \hbar \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta}} + \pi \hbar \delta(\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta}) e^{-i \omega t} + \\
 &\quad + [\delta_{\alpha' \alpha} \delta_{\beta' \beta} \delta_{\gamma \gamma'} C_{\delta \delta'}^{\dagger} + \delta_{\alpha' \alpha} \delta_{\beta' \beta} \delta_{\delta \delta'} C_{\gamma \gamma'}^{\dagger} - \\
 &\quad - \delta_{\alpha' \alpha} \delta_{\gamma \gamma'} \delta_{\delta \delta'} C_{\beta \beta'}^{\dagger} - \delta_{\beta' \beta} \delta_{\gamma \gamma'} \delta_{\delta \delta'} C_{\alpha \alpha'}^{\dagger}] \cdot \\
 &\quad \cdot [((1-n_{\alpha})(1-n_{\beta}) n_{\gamma} n_{\delta} - \nu \nu) \cdot \\
 &\quad \cdot (-i \hbar \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} - \hbar \omega} + \pi \hbar \delta(\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} - \hbar \omega)) - \\
 &\quad - ((1-n_{\alpha})(1-n_{\beta}) n_{\gamma} n_{\delta} - \nu \nu) \cdot \\
 &\quad \cdot (-i \hbar \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta}} + \pi \hbar \delta(\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta})) e^{-i \omega t} + n F \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Dabei steht $[(1-n_{\alpha})(1-n_{\beta}) n_{\gamma} n_{\delta} - \nu \nu]$ bzw. $[n_{\alpha} n_{\beta} (1-n_{\gamma}) + \nu \nu]$ abkürzend für $[(1-n_{\alpha})(1-n_{\beta}) n_{\gamma} n_{\delta} - n_{\alpha} n_{\beta} (1-n_{\gamma})(1-n_{\delta})]$ bzw. $[n_{\alpha} n_{\beta} (1-n_{\gamma}) + (1-n_{\alpha})(1-n_{\beta}) n_{\gamma}]$.

Wir bemerken zunächst, daß auch im Stoßintegral nur die voll antisymmetrisierten Potentialmatrixelemente, gekennzeichnet durch den Index "A" auftauchen. Der Index "A" wird deshalb in allem Folgenden weggelassen. Dann bemerken wir, das $e^{-i \omega t}$ und $e^{i \omega^{*} t}$ linear unabhängige Funktionen sind, so daß man die Glieder "positiver" Frequenz ω und die "negativer" Frequenz $-\omega^{*}$ in der Gesamtgleichung getrennt gleichsetzen kann. Wir beschränken uns im weiteren darauf, die Gleichung mit "positiver" Frequenz zu betrachten.

Schließlich trennen wir die Gesamtgleichung nach Ordnungen und setzen die Glieder 0. Ordnung und die 1. Ordnung getrennt gleich. Vergleich mit dem Ausdruck (31) für die linke Seite liefert als Gleichung 0. Ordnung:

$$0 = 2 \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} [(\lambda\delta|\nu|\alpha\beta)\delta_{\gamma\mu} - (\gamma\delta|\nu|\mu\beta)\delta_{\lambda\alpha}](\alpha\beta|\nu|\gamma\delta) \cdot \\ \cdot [(1-n_\alpha)(1-n_\beta)n_\gamma n_\delta - \nu\nu] [-i \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta} + \pi\delta(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta)] \quad (3.35a)$$

Aus Impulserhaltungsgründen verschwindet die rechte Seite von (35a) für $\lambda \neq \mu$ identisch (der Fall $\lambda = \mu$ wird auf Seite 40 weiter diskutiert). Die Gleichung 1. Ordnung spalten wir auf in eine diagonale ($\lambda = \mu$) und eine nicht-diagonale ($\lambda \neq \mu$) Gleichung. Diese Aufspaltung entkoppelt aufgrund der Impulserhaltung die Korrekturen w^* und C^+ . Wenn wir mit $-ie^{i\omega t}$ durchmultiplizieren ist nämlich die diagonale Gleichung 1. Ordnung:

$$2\pi\omega n_{\mu}w_{\mu}^* = -2 \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} [(\mu\delta|\nu|\alpha\beta)\delta_{\gamma\mu} - (\gamma\delta|\nu|\mu\beta)\delta_{\mu\alpha}](\alpha\beta|\nu|\gamma\delta) \cdot \\ \cdot \{ [n_\alpha n_\beta (1-n_\gamma) + \nu\nu] n_\delta w_\delta^* + [n_\alpha n_\beta (1-n_\delta) + \nu\nu] n_\gamma w_\gamma^* - \\ - [(1-n_\alpha)n_\gamma n_\delta + \nu\nu] n_\beta w_\beta^* - [(1-n_\beta)n_\gamma n_\delta + \nu\nu] n_\alpha w_\alpha^* \} \cdot \\ \cdot [\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta - \hbar\omega} + i\pi\delta(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta - \hbar\omega)] + \\ + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta} + i\pi\delta(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta)] \quad (3.35b)$$

Die Diagonalelemente von C^+ , die in dieser Gleichung im Prinzip vorkommen, sind weggelassen (da sie nur an dieser Stelle vorkommen, haben wir keine Bestimmungsgleichung für sie).

Die analoge Gleichung "negativer" Frequenz (die man aus (35b) durch die Ersetzungen $\omega \rightarrow -\omega^*$, $w^* \rightarrow w$ erhält) ist, sofern man die Hauptwertanteile vernachlässigt, einfach das komplex Konjugierte zu (35b). Es ist dann auch ersichtlich, daß (35b) eine rein imaginäre Eigenfrequenz ω liefert (wir betrachten w^* als reell), also eine reine Relaxation beschreibt. Es ist zu betonen, daß die Gesamtgleichung ((31) mit (34)) ein ganzes Spektrum von

Frequenzen zuläßt, während in (35b) nur der rein imaginäre Teil des Spektrums zu einer Lösung führt.

Wir werden uns im weiteren auf die nichtdiagonale Gleichung 1. Ordnung konzentrieren, diese ist:

$$\begin{aligned}
 & \{ [\epsilon_0 - (\epsilon_\lambda - \epsilon_\mu)] C_{\lambda\mu}^+ - 2 \sum_{\gamma\delta} \langle n_\delta - n_\gamma \rangle \langle \lambda\delta | V | \mu\gamma \rangle C_{\gamma\delta}^+ \} \langle n_\mu - n_\lambda \rangle = \\
 & = - 2 \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} [\langle \lambda\delta' | V | \alpha'\beta' \rangle \delta_{\gamma'\mu} - \langle \gamma'\delta' | V | \mu\beta' \rangle \delta_{\lambda\alpha}] \langle \alpha\beta | V | \gamma\delta \rangle \cdot \\
 & \cdot [\delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\beta'\beta} \delta_{\gamma\gamma'} C_{\delta\delta'}^+ + \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\beta'\beta} \delta_{\delta\delta'} C_{\gamma\gamma'}^+ - \\
 & \quad - \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{\delta\delta'} C_{\beta'\beta}^+ - \delta_{\beta'\beta} \delta_{\gamma\gamma'} \delta_{\delta\delta'} C_{\alpha'\alpha}^+] \cdot \\
 & \cdot \{ [(1-n_\alpha)(1-n_\beta)n_\gamma n_\delta - \nu\nu] \cdot \\
 & \quad \cdot [\frac{P}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta - \epsilon_0} + i\pi\delta(\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta - \epsilon_0)] - \\
 & \quad - [(1-n_\alpha)(1-n_\beta)n_\gamma n_\delta - \nu\nu] [\frac{P}{\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta} + i\pi\delta(\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon_\gamma - \epsilon_\delta)] \} \quad (3.35c)
 \end{aligned}$$

Die analoge Gleichung negativer Frequenz erhält man aus (35c) durch die Ersetzung $C^+ \rightarrow -C$ sowie $\epsilon \rightarrow -\epsilon^*$. (35c) beschreibt eine echte, um das Stoßintegral ergänzte, verallgemeinerte gedämpfte RPA-Schwingung um den HF-Grundzustand. Die Ausdrücke der Form $(1-n_\alpha)(1-n_\beta)n_\gamma n_\delta$ beinhalten das Pauliprinzip, da sie nur eine Streuung von besetzten Zuständen (γ, δ) in unbesetzte (α, β) zulassen. Man kann sie deshalb als "Pauli-Blockierfaktoren" bezeichnen. Daß sie in Kombination mit dem jeweiligen "vice-versa" - Term vorkommen, entspricht wie im klassischen Boltzmannstoßintegral dem Auftreten eines "Gewinn-" und eines "Verlust-Terms".

In der Gleichung (35c) und in der Gleichung 0. Ordnung (35a) kann man den Hauptwertanteil wegdiskutieren, wenn man eine Annahme über die Energieabhängigkeit der im Stoßintegral auftretenden Faktoren macht. Wesentlich dabei ist, daß wir ein stark entartetes System ($T \ll \mu/k_B$) betrachten wollen. Das bedeutet, daß die (Fermi-)Verteilungen n in der Nähe der Fermienergie sehr schnell veränderlich sind und - zusammen mit der durch die δ -Funktionen ausgedrückten Energieerhaltung - daß insbesondere die Pauli-Blockierfaktoren nur dann wesentlich von 0 verschieden sind, wenn alle vorkommenden Impulse

(fast) auf der Fermifläche liegen (sofern $\hbar\omega' \ll \mu$, was wir aber voraussetzen. Nimmt man nun an, daß die Potentialmatrixelemente und die Korrekturen C^+ nur schwach energieabhängig sind, so ist es vernünftig, diese als konstant bezüglich der Energie zu betrachten und durch ihren Wert auf der Fermifläche zu ersetzen. Es erscheint plausibel, diese Ersetzung auch dort zu machen, wo sie zusammen mit dem Hauptwertanteil auftreten. In den aus den Summationen folgenden Energieintegralen stehen dann neben dem Hauptwert- bzw. δ -Anteil nur noch die Pauli-Blockierfaktoren, was dazu führt, daß der Hauptwertanteil verschwindet: wir betrachten z.B. das Integral aus (35c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du_{\alpha'} du_{\beta'} du_{\gamma'} du_{\delta'} [n_{\alpha'} n_{\beta'} n_{\gamma'} n_{\delta'} - \langle n_{\alpha'} - 1 \rangle \langle n_{\beta'} - 1 \rangle \langle n_{\gamma'} - 1 \rangle \langle n_{\delta'} - 1 \rangle] \frac{P}{\varepsilon_{\alpha'} + \varepsilon_{\beta'} - \varepsilon_{\gamma'} - \varepsilon_{\delta'} - \hbar\omega'}$$

Die Integrationsvariablen sind als $u_i = \frac{\varepsilon_i - \mu}{k_B T}$ ($i = \gamma', \delta'$) bzw.

$-u_j = \frac{\mu - \varepsilon_j}{k_B T}$ ($j = \alpha', \beta'$) gewählt, die untere Grenze $-\frac{\mu}{k_B T}$ (bzw. obere Grenze $\frac{\mu}{k_B T}$) ist wegen $\frac{\mu}{k_B T} \gg 1$ nach $-\infty$ (bzw. $+\infty$) verschoben worden.

Die vierfachen Produkte von Verteilungsfunktionen heben sich heraus, ein Beitrag mit dreifachem Produkt ist ($\tau' = \frac{\hbar\omega'}{k_B T}$)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} du_{\alpha'} du_{\beta'} du_{\gamma'} du_{\delta'} n_{\alpha'} n_{\beta'} n_{\gamma'} \frac{P}{u_{\alpha'} + u_{\beta'} + u_{\gamma'} + u_{\delta'} + \tau'} =: \\ & =: \int_{-\infty}^{+\infty} du_{\alpha'} du_{\beta'} du_{\gamma'} n_{\alpha'} n_{\beta'} n_{\gamma'} \int_{-\infty}^{+\infty} du_{\delta'} \frac{P}{u_{\alpha'} + u_{\beta'} + u_{\gamma'} + u_{\delta'}} = 0 \end{aligned} \quad (3.36a)$$

In der Abkürzung u_0 ist alles untergebracht, was nicht von $u_{\delta'}$ abhängt. Analog verschwinden die Beiträge der übrigen Produkte, ebenso der Hauptwertanteil ohne $\hbar\omega'$. Auch der δ -Funktionsanteil ohne $\hbar\omega'$ verschwindet, da aus der Energieerhaltung $\varepsilon_{\alpha'} + \varepsilon_{\beta'} = \varepsilon_{\gamma'} + \varepsilon_{\delta'}$ folgt

$$[(1 - n_{\alpha'}) (1 - n_{\beta'}) n_{\gamma'} n_{\delta'} - uv] = \frac{e^{u_{\alpha'} + u_{\beta'}} - e^{u_{\gamma'} + u_{\delta'}}}{(1 + e^{u_{\alpha'}}) (1 + e^{u_{\beta'}}) (1 + e^{u_{\gamma'}}) (1 + e^{u_{\delta'}})} = 0 \quad (3.36b)$$

Auf diese Weise verschwindet auch der δ -Anteil des Stoßintegrals in 0. Ordnung (vgl. (35a)), die Gleichung 0. Ordnung ist also genau dann erfüllt, wenn n die Fermiverteilung ist.

Es bleibt von der nichtdiagonalen Gleichung der Beitrag der δ -Funktionen mit $\hbar\omega'$. Die Energieintegrale liefern hier (siehe Anhang III):

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} d\varepsilon_{\alpha} d\varepsilon_{\beta} d\varepsilon_{\gamma} d\varepsilon_{\delta} [(1-n_{\beta}) (1-n_{\alpha}) n_{\gamma} n_{\delta} - \nu\nu] \delta(\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} - \hbar\omega') \approx \\ & \approx (k_B T)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} du_{\alpha} du_{\beta} du_{\gamma} du_{\delta} n_{\alpha} n_{\beta} n_{\gamma} n_{\delta} [e^{\tau'} - 1] \delta(u_{\alpha} + u_{\beta} + u_{\gamma} + u_{\delta} - \tau') = \\ & = (k_B T)^3 \frac{\pi^2}{6} (\tau'^2 + 4\pi^2) \end{aligned} \quad (3.36c)$$

Mit den Ergebnissen (36a) und (36b) kann man schließlich die nichtdiagonale Gleichung - unter Ausnutzung der Kroneckerdeltas und nach Vertauschung einiger Summationsindizes - auf folgende Form bringen

$$\begin{aligned} & \langle [\hbar\omega - (\varepsilon_{\lambda} - \varepsilon_{\mu})] C_{\lambda\mu}^{\dagger} - 2 \sum_{\gamma\delta} (n_{\delta} - n_{\gamma}) \langle \lambda\delta | V | \mu\gamma \rangle C_{\gamma\delta}^{\dagger} \rangle (n_{\mu} - n_{\lambda}) = \\ & = -2i\pi \sum_{\beta\gamma\delta} \langle \lambda\mu\beta | V | \gamma\delta \rangle^2 \delta(\varepsilon_{\lambda} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} - \hbar\omega') [(1-n_{\lambda})(1-n_{\beta})n_{\gamma}n_{\delta} - \nu\nu] + \\ & \quad + \langle \lambda\mu\beta | V | \gamma\delta \rangle^2 \delta(\varepsilon_{\mu} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} + \hbar\omega') [n_{\mu}n_{\beta}(1-n_{\gamma})(1-n_{\delta}) - \nu\nu] C_{\lambda\mu}^{\dagger} - \\ & - 2i\pi \sum_{\gamma\delta\beta\beta'} \langle \lambda\beta | V | \gamma\delta \rangle \langle \gamma\delta' | V | \mu\beta' \rangle \delta(\varepsilon_{\lambda} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} - \hbar\omega') [(1-n_{\lambda})(1-n_{\beta})n_{\gamma}n_{\delta} - \nu\nu] + \\ & \quad + \delta(\varepsilon_{\mu} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} + \hbar\omega') [n_{\mu}n_{\beta}(1-n_{\gamma})(1-n_{\delta}) - \nu\nu] C_{\beta'\beta}^{\dagger} + \\ & + 4i\pi \sum_{\beta\gamma\delta\delta'} \langle \lambda\beta | V | \gamma\delta \rangle \langle \gamma\delta' | V | \mu\beta \rangle \delta(\varepsilon_{\lambda} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} - \hbar\omega') [(1-n_{\lambda})(1-n_{\beta})n_{\gamma}n_{\delta} - \nu\nu] + \\ & \quad + \delta(\varepsilon_{\mu} + \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma} - \varepsilon_{\delta} + \hbar\omega') [n_{\mu}n_{\beta}(1-n_{\gamma})(1-n_{\delta}) - \nu\nu] C_{\delta\delta'}^{\dagger}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

Diese Gleichung ist unser Ausgangspunkt für die Bestimmung der Ausbreitung und Dämpfung des Nullten Schalls.

Die wesentlichen Schritte in ihrer Herleitung waren:

1. Die Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Greenfunktion, gekoppelt an die Zweiteilchen-Greenfunktion.
2. Näherung (13) für die Zweiteilchen-Greenfunktion (bedingt z.B., daß nur die Selbstenergie (30b) in der effektiven Masse m^* berücksichtigt ist).
3. Besetzungszahlansatz (22) für die Einteilchen-Greenfunktion.
4. Linearisierung in den Korrekturen w^* und C^+ .
5. Entkoppelung von w^* und C^+ mittels der Impulserhaltung.

Außerdem wurden folgende physikalische Bedingungen verwendet:

6. $k_B T \ll \mu$ und $\hbar \omega' \ll \mu$ (dann folgt aus dem Energiesatz und der Pauli-Blockierung die Beschränkung auf die Fermifläche). Man beachte aber, daß über das Verhältnis von $\hbar \omega'$ und $k_B T$ keine einschränkende Bedingung gemacht wurde, so daß sowohl $\hbar \omega' \ll k_B T$ als auch $\hbar \omega' \gg k_B T$ zulässig ist.

Wir bemerken, daß das Stoßintegral in (37) rein imaginär (C^+ ist reell), der mittlere-Feld - Term auf der linken Seite aber reell ist, so daß das Stoßintegral den absorptiven Anteil der Gl.(37) darstellt (man beachte, daß der in Gl.(37) auf die Funktion C^+ wirkende gesamte Integraloperator komplex, der in der diagonalen Gleichung (35b) auf die Funktion w^* wirkende Integraloperator dagegen rein imaginär ist!).

In den folgenden Kapiteln wird der Einfachheit halber der Strich an ω' weggelassen, d.h. ω wird als reell betrachtet.

Wir wollen noch die Struktur des Stoßintegrals in (37) mit dem phänomenologischen Ansatz von Landau in [1] vergleichen. Dort hat das Stoßintegral die Gestalt

$$I(n) = \iiint d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 d^3p_4 \, w(p_1, p_2; p_3, p_4) \, \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2 - \hbar q) \cdot \\ \cdot \delta(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar \omega') [(1-n_3)(1-n_4)n_1 n_2 - \nu \nu]$$

mit der Stoßwahrscheinlichkeit $w(p_1, p_2; p_3, p_4)$ und den Gleichgewichtsverteilungsfunktionen n_i . Beide Ausdrücke haben dieselbe Struktur, sind aber insofern verschieden, als das Stoßintegral in (37) auch Nichtgleichgewichtskorrekturen zu den Verteilungsfunktionen enthält und aus einer mikroskopischen Betrachtungsweise abgeleitet wurde. Durch die Wahl des Ansatzes (22) erhalten wir automatisch die Pauli-Blockierfaktoren, die von Landau in verallgemeinernder Analogie zu dem Gewinn- u. Verlustterm des klassischen Boltzmannstoßintegrals eingeführt werden.

IV. Ausbreitung von Nulltem Schall

In diesem Kapitel soll die Ausbreitung von Schwingungen, wie sie Gl.(3.37) beschreibt, untersucht werden. Zu diesem Zweck wird das Stoßintegral, das für die Dämpfung verantwortlich ist, vernachlässigt. Der Sinn dieser Betrachtung liegt einmal darin, bekannte Ergebnisse aus unserer Gleichung wiederzugewinnen; zum anderen darin, die Behandlung der vollen Gleichung methodisch vorzubereiten.

Der erste Abschnitt behandelt die Eigenwertgleichung, der zweite Abschnitt führt den dynamischen Formfaktor ein.

1. Eigenwertgleichung

Als erstes gehen wir, wie in Kap. I, zu einer kontinuierlichen Schreibweise über, indem wir statt Summationen Integrale über die Impulse einführen.

Gemäß Gl.(3.29b) ist $\psi_\mu(\underline{r})$ die Wellenfunktion eines Teilchens mit der Energie $\varepsilon_\mu = \frac{p_\mu^2}{2m^*}$, $\psi_\mu(\underline{r}) = \langle \underline{r} | \mu \rangle$ ist daher proportional zu $e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \underline{r}}$ (mit $p_\mu = \hbar \mathbf{k}_\mu =: \hbar \mathbf{k}_0$). Führt man periodische Randbedingungen in einem Normierungsvolumen V ein, so kann man im Limes $V \rightarrow \infty$ mit den Ersetzungen

$$|\mu\rangle \rightarrow |\mathbf{k}_0\rangle, \quad \sum_\mu \rightarrow \sum_{\sigma_\mu} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k_0, \quad \delta_{\gamma\mu} \rightarrow \delta_{\sigma_\gamma \sigma_\mu} \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0) \quad (4.1)$$

zu Integralen übergehen.

Um die Spin- und Impulserhaltung in den Potentialmatrixelementen explizit hinschreiben zu können, führen wir die sogenannte Vertexfunktion (erster Ordnung) Γ ein:

$$2(\lambda\delta|\mathbf{V}|\mu\gamma) =: \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{k}_\lambda + \mathbf{k}_\delta - \mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}_\gamma) \delta_{\sigma_\lambda + \sigma_\delta, \sigma_\gamma + \sigma_\mu} \Gamma_{\sigma_\lambda \sigma_\delta \sigma_\gamma \sigma_\mu}(\mathbf{k}_\lambda, \mathbf{k}_\delta; \mathbf{k}_\gamma, \mathbf{k}_\mu) \quad (4.2)$$

Für spinunabhängiges Potential gilt "auf der Impulsschale"

(d.h. $\mathbf{k}_\lambda + \mathbf{k}_\delta - \mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}_\gamma = 0$) und mit $\sigma_\lambda + \sigma_\delta = \sigma_\gamma + \sigma_\mu$

$$\Gamma_{\sigma_\lambda \sigma_\delta \sigma_\gamma \sigma_\mu}(\mathbf{k}_\lambda, \mathbf{k}_\delta; \mathbf{k}_\gamma, \mathbf{k}_\mu) = \delta_{\sigma_\lambda \sigma_\mu} \tilde{V}(\mathbf{k}_\lambda - \mathbf{k}_\mu) - \delta_{\sigma_\lambda \sigma_\gamma} \tilde{V}(\mathbf{k}_\lambda - \mathbf{k}_\gamma)$$

wobei $\tilde{V}(\mathbf{k}_\lambda - \mathbf{k}_\mu) = \tilde{V}(\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}_\lambda) = \langle \mathbf{k}_\lambda | \mathbf{V}(\underline{r}) | \mathbf{k}_\mu \rangle$ die Fouriertransformierte der Zweiteilchenwechselwirkung ist. Die Vertexfunktion ist daher proportional zur Streuamplitude in erster Bornscher Näherung.

Die Nichtdiagonalelemente C^+ sollen nun eine $1p-1h$ -Anregung mit dem Impuls $\hbar \mathbf{q}$ darstellen, wir schreiben deshalb in einer in $\underline{q}$ symmetrischen Schreibweise $p_\lambda = \hbar(\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}/2)$, $p_\mu = \hbar(\mathbf{k}_0 - \mathbf{q}/2)$, $p_\gamma = \hbar(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}/2)$, $p_\delta = \hbar \mathbf{k}_2$ sowie $\sigma_\lambda = \sigma_\mu = \sigma_0$, $\sigma_\gamma = \sigma_1$, $\sigma_\delta = \sigma_2$. Außerdem wird angenommen, daß die Korrekturen C^+ in den Spinindizes diagonal mit gleichen Diagonalelementen, d.h. spinunabhängig (analog zu Kap. I), sind; ferner werden die Abkürzungen $0\pm := \mathbf{k}_0 \pm \mathbf{q}/2$ etc. eingeführt, die in allem folgenden ständig vorkommen werden.

Damit und unter Vernachlässigung des Stoßintegrals erhalten wir für Gl. (3.37) den Ausdruck:

$$\begin{aligned} (n_{0+} - n_{0-}) & \{ [\hbar\omega - (\varepsilon_{0+} - \varepsilon_{0-})] c_{0+0-}^{\dagger} - \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k_1 (n_{1-} - n_{1+}) \cdot \\ & \cdot \sum_{\sigma_1} \Gamma_{\sigma_0 \sigma_1} (0+, 1-; 1+, 0-) c_{1+1-}^{\dagger} \} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

In der Vertexfunktion ist nur noch das erste Spinindexpaar hingeschrieben. Gl.(3) läßt sich in eine eindimensionale Integralgleichung umwandeln, wenn wir benützen, daß wegen $k_B T \ll \mu$ und $\hbar\omega \ll \mu$ nur Impulse in einem sehr kleinen Bereich um die Fermifläche am dynamischen Geschehen teilnehmen. Wir betrachten deshalb

$$|k_0| = |k_1| = k_F, \quad |q|/k_F \ll 1 \quad (4.4)$$

wobei k_F mit der Dichte N/V des Systems gemäß (1.7) zusammenhängt.

Es gilt dann mit Gl.(3.30a)

$$\varepsilon_{0+} - \varepsilon_{0-} = \frac{\hbar^2 (k_0 + q/2)^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 (k_0 - q/2)^2}{2m^*} = \hbar v_0 \cdot q \quad (4.5a)$$

sowie in 1. Ordnung in q

$$n_{0-} - n_{0+} \approx - \frac{\partial n_{k_0}}{\partial \varepsilon_{k_0}} (\varepsilon_{0+} - \varepsilon_{0-}) = + \frac{\hbar v_0 \cdot q}{k_B T} n_{k_0} (1 - n_{k_0}) \quad (4.5b)$$

wobei

$$|v_0| \equiv |v_{k_0}| = \frac{\hbar |k_0|}{m^*} = \frac{\hbar k_F}{m^*} = v_F \quad (4.5c)$$

der Betrag der Geschwindigkeit auf der Fermifläche ist.

Wegen

$$n_k (1 - n_k) = \frac{1}{4 \cosh^2 \frac{\varepsilon_k - \mu}{2 k_B T}} \rightarrow \delta \left(\frac{\varepsilon_k - \mu}{k_B T} \right) \quad \text{für } T \rightarrow 0 \quad (4.6a)$$

ersetzen wir die Ableitung der Verteilungsfunktion durch die δ -Funktion

$$\frac{\partial n_k}{\partial \varepsilon_k} \approx -\delta(\varepsilon_k - \mu) \quad (4.6b)$$

und in diesem Sinn das Integrationselement d^3k_1 in Kugelkoordinaten durch

$$d^3k_1 = dk_1 k_1^2 d\Omega_1 \approx \frac{m^* k_F}{\hbar^2} d\varepsilon_1 d\Omega_1 = \frac{m^* k_F}{\hbar^2} d\varepsilon_1 ds_1 d\alpha_1 \quad (4.6c)$$

mit $s_1 = \cos\theta_1$ (als Polarachse wählen wir die Richtung von $\mathbf{q}$, so daß θ_1 der Winkel zwischen $\mathbf{k}_1$ und $\mathbf{q}$ ist). Die Näherungen (6b) und (6c) sind äquivalent dazu, daß v_k und die Vertexfunktion als langsam mit ε_k veränderlich betrachtet werden. Aus dem gleichen Grund betrachten wir die Vertexfunktion für $\mathbf{q} = 0$ und setzen

$$\Gamma_{\sigma_0 \sigma_1}(\mathbf{k}_0 + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{q}}{2}; \mathbf{k}_1 + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k}_0 - \frac{\mathbf{q}}{2}) \rightarrow \Gamma_{\sigma_0 \sigma_1}(k_F \hat{\mathbf{k}}_0, k_F \hat{\mathbf{k}}_1; k_F \hat{\mathbf{k}}_1, k_F \hat{\mathbf{k}}_0) =: f_{\sigma_0 \sigma_1}(\hat{\mathbf{k}}_0, \hat{\mathbf{k}}_1) \quad (4.7)$$

Diese Größe hat die Bedeutung einer Wechselwirkungsfunktion der Quasiteilchen. Wenn wir die Isotropie des Systems ausnützen, so hängt $f(\hat{\mathbf{k}}_0, \hat{\mathbf{k}}_1)$ nur vom Winkel χ zwischen $\hat{\mathbf{k}}_0$ und $\hat{\mathbf{k}}_1$ ab. Wir können außerdem den äußeren Spinindex σ_0 oBdA als $+1/2$ annehmen (bezüglich irgendeiner vorgegebenen z-Achse). Wegen der Spinunabhängigkeit der C^+ liefert dann die Spinsummation (wie in (1.20), aber mit $\uparrow\downarrow$ statt $\uparrow-$)

$$\sum_{\sigma_1} f_{\sigma_0 \sigma_1}(\chi) = f_{\uparrow\uparrow}(\chi) + f_{\uparrow\downarrow}(\chi)$$

Schließlich eliminieren wir den Gesamtfaktor (5b), indem wir über ε_{k_0} integrieren (dadurch wird Gl.(3) auf die Fermifläche reduziert) und durch $\hbar v_0 \cdot \mathbf{q}$ dividieren. Damit nimmt Gl.(3) die Gestalt an:

$$[\hbar\omega - \hbar v_0 \cdot \mathbf{q}] C_{0+0-}^+ - \frac{V m^* k_F}{(2\pi) 3 \hbar^2} \int d\Omega_1 \hbar v_1 \cdot \mathbf{q} [f_{\uparrow\uparrow}(\chi) + f_{\uparrow\downarrow}(\chi)] C_{1+1-}^+ = 0 \quad (4.8)$$

Die Funktionen C_{0+0-}^+ , C_{1+1-}^+ sind jetzt ebenfalls auf der Fermifläche zu nehmen, d.h. sie hängen nur noch von den Winkeln bezüglich $\mathbf{q}$ ab.

Wir definieren

$$C_{0+0-}^{+} \Big|_{|k_0|=k_F} = C^+(k_F, s_0 = \cos \theta_0, \alpha_0) =: \psi(s_0, \alpha_0) \quad (4.9)$$

Die Funktion ψ hängt vom Polarwinkel θ_0 und vom Azimut α_0 von k_0 bezüglich irgendeiner Achse ab (es bietet sich an, q als Polarachse zu wählen). Wir führen nun wie in Kap. I eine dimensionslose Quasiteilchenwechselwirkung

$$2F^{(s)}(X) = \frac{v_m^* k_F}{\pi^2 \hbar^2} [f_{\uparrow\uparrow}(X) + f_{\uparrow\downarrow}(X)] \quad (4.10)$$

und die auf v_F normierte Phasengeschwindigkeit

$$\bar{s} = \frac{q}{v_F q} \quad (1.25)$$

ein. Dann erhalten wir nach Division durch $\hbar v_F q$ die allgemeine Nullte-Schall-Gleichung (1.22) aus Kapitel I

$$(\bar{s} - s_0) \psi(s_0, \alpha_0) - \int \frac{d\Omega}{4\pi} F^{(s)}(X) s_1 \psi(s_1, \alpha_1) = 0 \quad (4.11)$$

Wie bereits dort diskutiert, entwickelt man $F^{(s)}(X)$ nach Kugelfunktionen (vgl. (1.24)) und führt damit die Landauparameter $F_p^{(s)}$ ein, die wir jetzt in unserer Formulierung ebenfalls verwenden können. Für die folgende Diskussion wollen wir uns auf das einfachste Modell beschränken, in dem wir $F^{(s)}(X) = F_0 = \text{const}$ setzen. Die resultierende Gleichung ist dann effektiv gar keine Integralgleichung mehr, da der Integralanteil nicht von s_0 und α_0 abhängt. Auch ψ braucht dann nur als vom Polarwinkel abhängig betrachtet zu werden - siehe Kap. I, S. 12. Der Übersichtlichkeit halber stellen wir die Ergebnisse der dortigen Diskussion von Gl.(1.26) hier noch einmal zusammen. Wir schreiben:

$$(\bar{s} - s) \psi(s) = -\frac{F_0}{2} \int ds_1 s_1 \psi(s_1) =: \frac{1}{2} B(\bar{s})$$

Für $\bar{s} > 1$ ist die Lösung offensichtlich

$$\psi(s_0) = \frac{1}{2} \frac{B(\bar{s})}{\bar{s} - s_0}, \quad \bar{s} > 1 \quad (1.27)$$

Für $\bar{s} < 1$ (der Herleitung in Kap. III entsprechend betrachten wir hier nur positive Frequenzen ω , d.h. $\bar{s} > 0$) tritt noch ein δ -förmiger Term in der Lösung auf

$$\psi(s_0) = \frac{1}{2} B(\bar{s}) \frac{P}{\bar{s} - s_0} + B(\bar{s}) \frac{1 - F_0 Q_1(\bar{s})}{F_0 \bar{s}} \delta(s_0 - \bar{s}) \quad , \quad \bar{s} < 1 \quad (1.32)$$

$$Q_1(z) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ds \frac{P_1(s)}{z - s} = \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1 \quad (z \text{ komplex}) \quad (1.29)$$

ist die erste Legendrefunktion 2. Art.

Im Fall $\bar{s} > 1$ ergibt sich die Bedingung

$$1 = F_0 Q_1(\bar{s}) =: F_0 Q(s_d) \quad (1.28)$$

die - in Abhängigkeit von F_0 - nur für ein wohlbestimmtes $\bar{s} = s_d(F_0)$ mit $F_0 > 0$ erfüllt werden kann, da $Q_1(\bar{s})$ im Bereich $\bar{s} > 1$ monoton fallend und positiv ist.

Im Fall $\bar{s} < 1$ ergibt sich keine derartige Bedingung. Im Bereich $0 < \bar{s} < 1$ unterliegt die Phasengeschwindigkeit also keiner Einschränkung, während aus (1.28) eine lineare Dispersionsrelation folgt, wie sie für Schallwellen charakteristisch ist:

$$\omega = s_d \nu_F q =: c q \quad (1.30)$$

mit der Schallgeschwindigkeit c .

Bis auf die Bestimmung der Normierungskonstanten $B(\bar{s})$ (die im Anhang IV angegeben ist), ist damit - in diesem einfachen Modell - die Gleichung (11) gelöst. Da wir uns aber auch für die Antwortfunktion (Resolvente) auf eine äußere Störung des Systems interessieren, soll sie noch von einem allgemeineren Standpunkt aus diskutiert werden.

2. Der dynamische Formfaktor

In dem einfachen Modell mit der konstanten Quasiteilchenwechselwirkung F_0 schreibt sich Gl.(8) folgendermaßen als Eigenwertgleichung

$$\int_{-1}^1 ds' \hat{R}_{(0)}(s, s') \psi(s') = \kappa \omega \psi(s) \quad (4.12a)$$

mit dem singulären Integralkern

$$\hat{R}_{(0)}(s, s') = \kappa \underline{v}' \cdot \underline{q} [\delta(s-s') + \frac{F_0}{2}] \quad (4.12b)$$

Der Index (0) soll auf die Vernachlässigung des Stoßterms hinweisen. Zur Konstruktion der Resolvente, d.h. zur Inversion des Integraloperators, ist es notwendig, zu einer Form mit nichtsingulärem Kern überzugehen. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\psi(s) := [\kappa \omega - \kappa \underline{v}' \cdot \underline{q}] \psi(s) = (\bar{s}-s) \kappa v_F q \psi(s) \quad (4.13)$$

Außerdem betrachten wir eine äußere Störung $\psi^{ex}(q, \omega)$ des Systems, die bezüglich s eine Konstante ist, aber mit einer Frequenz ω und einem Wellenvektor q auf das System wirkt. Sie wird "adiabatisch eingeschaltet", was sich darin ausdrückt, daß wir ω einen infinitesimalen positiven Imaginärteil geben, d.h. wir setzen $\bar{s} \rightarrow \bar{s} + i\eta$. In abstrakter Hilbertraum-Schreibweise erhalten wir dann aus (12a) die Gleichung

$$(1 - \hat{K}_{(0)}) |\psi\rangle = 1 \psi^{ex} \quad (4.14a)$$

mit dem separablen Integralkern¹⁾

$$\langle s | \hat{K}_{(0)} | s' \rangle = K_{(0)}(s, s') = \frac{F_0}{2} \frac{\kappa \underline{v}' \cdot \underline{q}}{[\kappa \omega - \kappa \underline{v}' \cdot \underline{q} + i\eta \kappa v_F q]} = \frac{F_0}{2} \frac{s'}{\bar{s} - s' + i\eta} \quad (4.14b)$$

Die äußere Störung $\psi^{ex}(q, \omega)$, die in (14a) als Inhomogenität auftritt, wird aus Gl.(3.20) bestimmt (mit dem Ansatz $\psi^{ex}(\underline{r}, t) = \psi^{ex}(q, \omega) e^{i(q \cdot \underline{r} - \omega t)}$).

Gleichung (14a) wird gelöst durch

$$|\psi\rangle = (1 - \hat{K}_{(0)})^{-1} 1 \psi^{ex} =: \hat{R}_{(0)} 1 \psi^{ex} \quad (4.15a)$$

¹⁾ Die Vektoren $|s\rangle$ sollen im Intervall $[-1, 1]$ ein VON-System bilden.

mit der Resolvente (Antwortfunktion)

$$R_{(0)}(s, s') = \langle s | (1 - \hat{K}_{(0)})^{-1} | s' \rangle \quad (4.15b)$$

Die Kenntnis der Eigenvektoren von $\hat{K}_{(0)}$ ermöglicht uns, die Resolvente in der Spektraldarstellung hinzuschreiben. Das vollständige Eigenfunktionensystem (wegen der Nichtthermizität von $\hat{K}_{(0)}$ muß man zwischen "rechten" und "linken" Eigenvektoren $|\psi_n\rangle$ und $\langle\bar{\psi}_n|$ unterscheiden) wird im Anhang IV hergeleitet. Wir benötigen hier lediglich, daß nur einer der Eigenwerte (die wir mit α_n bezeichnen) von Null verschieden ist, und zwar ist

$$\alpha_0 = F_0 Q_1(\bar{s} + i\eta) = F_0 Q_1(\bar{s}) - i s F_0 \frac{1}{2} \bar{s} \theta(1 - \bar{s}) \quad (4.16a)$$

mit den Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \psi_0(s) &= \frac{D_0(\bar{s} + i\eta)}{2Q_1(\bar{s} + i\eta)} = \frac{F_0}{2} \frac{D_0}{\alpha_0} = \text{const}, \\ \bar{\psi}_0(s) &= \frac{A_0}{2Q_1(\bar{s} + i\eta)} \frac{s}{\bar{s} + i\eta - s} = \frac{A_0}{\alpha_0} K_{(0)}(s', s) \end{aligned} \quad (4.16b)$$

Die Stufenfunktion θ in (16a) tritt auf, weil $Q_1(z)$ auf der reellen Achse im Intervall $[-1, 1]$ einen Schnitt hat. Außerdem gilt aufgrund der Normierung der Eigenvektoren die Beziehung $A_0 D_0(\bar{s} + i\eta) = 2Q_1(\bar{s} + i\eta) = \frac{2}{F_0} \alpha_0$.

Für alle $n > 0$ gilt

$$\alpha_n = 0, \quad \bar{\psi}_n(s) = P_n(s), \quad n > 0 \quad (4.16c)$$

Die $P_n(s)$ sind die Legendrepolynome 1. Art. Die Resolvente in der Spektraldarstellung lautet somit

$$\hat{R}_{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\psi_n\rangle \langle \bar{\psi}_n|}{1 - \alpha_n} = 1 + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} |\psi_0\rangle \langle \bar{\psi}_0| \quad (4.17)$$

Man beachte, daß $\hat{R}_{(0)}$ für $\bar{s} > 1$ an der Stelle $\alpha_0 \equiv F_0 Q_1(\bar{s}) = 1$, die die Ausbreitung von Nulltem Schall bestimmt (Gl.(1.28)), einen Pol hat.

Auf eine konstante Störung angewandt, liefert nur der Summand $n=0$ einen Beitrag, da $\langle \bar{\psi}_n | \mathbb{I} e^x \rangle$ für $n > 0$ wegen (16c) verschwindet. Mit (16a,b), (15a) und

nach Rücktransformation mittels (13) auf die Gleichung (12a) ergibt sich

$$\hbar v_F q \psi(s) = \frac{1}{\bar{s} - s + i\eta} \frac{\langle s | \hat{\psi}_0 \rangle \langle \bar{\psi}_0 | \hat{\psi}^{ex} \rangle}{1 - \alpha_0} = \frac{1}{\bar{s} - s + i\eta} \frac{\hat{\psi}^{ex}(q, \omega)}{1 - F_0 Q_1(\bar{s} + i\eta)} \quad (4.18)$$

Wir wollen nun die Antwort des Systems durch den dynamischen Formfaktor $S(\omega, q)$ ausdrücken. Dieser ist per definitionem die Fouriertransformierte der Dichte-Dichte - Korrelationsfunktion

$$S(\omega, q) := \int d^3r dt \langle \delta \hat{n}(r_1, t_1) \delta \hat{n}(r_2, t_2) \rangle e^{-i(q \cdot r - \omega t)} =: \int \sigma(\omega, q) \quad (4.19a)$$

wobei wegen der Homogenität und Isotropie des Systems $r = r_1 - r_2$, $t = t_1 - t_2$ und

$$S(\omega, q) = S(\omega, q) \quad (4.19b)$$

gilt. Der Mittelwert $\langle \dots \rangle$ bedeutet die Mittelung über das kanonische Ensemble.

Im Rahmen der linearen Antworttheorie ist (im Fourierraum) die Dichte-änderung $\delta n(\omega, q)$, die ein äußeres Potential $\hat{\psi}^{ex}(q, \omega)$ hervorruft, durch eine allgemeine Suszeptibilität $\alpha(\omega, q)$ (die "Antwortfunktion") gegeben:

$$\delta n(\omega, q) = \alpha(\omega, q) \hat{\psi}^{ex}(q, \omega) \quad (4.20)$$

$\alpha(\omega, q)$ ist eine komplexe Funktion, deren Real- und Imaginärteil durch Kramers-Kronig - Relationen miteinander verbunden sind. Es genügt folglich, nur den Imaginärteil zu betrachten. Mit ihm ist der dynamische Formfaktor über folgende Beziehung verknüpft (siehe z.B. [7])

$$S(\omega, q) = -2\pi Z \operatorname{Im} \alpha(\omega, q) \quad , \quad (4.21a)$$

wobei der Faktor Z gegeben ist durch

$$Z = [1 - \exp(-\frac{\hbar \omega}{k_B T})]^{-1} \quad (4.21b)$$

Dieser Zusammenhang ist Inhalt des sogenannten Fluktuations-Dissipations - Theorems. Um die Beziehung zwischen $\delta n(\omega, q)$ und den bei uns vorkommenden Funktionen zu finden, betrachten wir den Ansatz (3.25) für die Besetzungszahlmatrizen oder $G_1(3)$. Offensichtlich ist $(n_{0-} - n_{0+}) C_{0+0-}^+$ die Änderung der Besetzungszahl der Quasiteilchen bei einem bestimmten Impuls $\hbar k_0$ und Spin σ_0 .

Die gesamte Änderung ihrer Dichte (die auch die Änderung der wirklichen Dichte des Systems ist) erhält man daraus durch Integration über k_0 und Summation über σ_0 . Wir haben also¹⁾

$$\delta n(\theta, q) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 k_0 (n_{0-} - n_{0+}) C_{0+0-}^{\dagger} \quad (4.22a)$$

($g = 2$ ist die Spinmultiplizität). Wenn wir (5b) und (6b) für $(n_{0-} - n_{0+})$, und außerdem (9) einsetzen, erhalten wir ($s_0 \equiv s$)

$$\delta n(\theta, q) = \frac{gm^* k_F}{(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{-1} \int ds \, \hbar \underline{v} \cdot \underline{q} \, \psi(s) \quad (4.22b)$$

Damit wird der dynamische Formfaktor

$$S_{(0)}(\theta, q) = -2\pi \frac{gm^* k_F}{(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{-1} \int ds \, \frac{\hbar \underline{v} \cdot \underline{q} \psi(s)}{\hbar^2 \epsilon^x(\underline{q}, \theta)} \quad (4.23)$$

Das Integral läßt sich mit $\hbar \underline{v} \cdot \underline{q} \psi(s)$ aus Gl.(18) leicht auswerten, es ist aber in Hinblick auf Kap. V günstig, eine etwas stärker formalisierte Schreibweise einzuführen. Wir betrachten dazu nochmals Gl.(14a). Schaltet man die Wechselwirkung F_0 zwischen den Quasiteilchen ab, so ist $\hat{K}_{(0)} = 0$ und $|\psi\rangle = |\psi\rangle^2$. Die Funktion $\hbar \underline{v} \cdot \underline{q} \psi(s)$ ist dann wegen (13) einfach durch

$$\hbar \underline{v} \cdot \underline{q} \psi(s) = \frac{s}{\bar{s} + i\eta - s} \psi(s) = \frac{s}{\bar{s} + i\eta - s} \hbar^2 e^x(\underline{q}, \theta) \quad (4.24)$$

gegeben. Hierin spielt offensichtlich die Funktion

$$G_0(s) := \frac{s}{\bar{s} + i\eta - s}$$

die Rolle der Resolvente. Wir definieren den Greenschen Operator $\hat{G}_0$ durch

$$\langle s | \hat{G}_0 | s' \rangle := \frac{s}{\bar{s} + i\eta - s} \delta(s - s') = G_0(s') \delta(s - s') \quad (4.25)$$

¹⁾ Da wir eine Dichte betrachten, fällt das Volumen V vor der Integration hier weg.

²⁾ Es soll $\langle s | \psi \rangle = \hbar \underline{v} \cdot \underline{q} \psi(s)$ sein.

und haben damit (24) in der Form

$$|\psi\rangle = \hat{G}_0 |\psi^{ex}\rangle \quad (4.26)$$

Unter Berücksichtigung der Quasiteilchenwechselwirkung ($F_0 \neq 0$) gilt dann nach (15a)

$$|\psi\rangle = \hat{G}_0 |\psi\rangle = \hat{G}_0 \hat{K}_{(0)} |\psi^{ex}\rangle = \hat{G}_0 (1 - \hat{K}_{(0)})^{-1} |\psi^{ex}\rangle \quad (4.27)$$

Hier spielt der Operator $\hat{G}_0 (1 - \hat{K}_{(0)})^{-1}$ die Rolle der Resolvente (Green-schen Funktion) mit Wechselwirkung. Wir bemerken, daß man $\hat{K}_{(0)}$ in der Form

$$\hat{K}_{(0)} = \hat{U} \hat{G}_0 \quad (4.28a)$$

schreiben kann, wobei der Potentialoperator $\hat{U}$ durch

$$\langle s | \hat{U} | s' \rangle = \frac{1}{2} F^{(s)}(x) = \frac{F_0}{2} \quad (4.28b)$$

gegeben ist. Wir nennen konsequenterweise die Resolvente aus (27) $\hat{G}$ und erhalten die Beziehung

$$\hat{G} = \hat{G}_0 (1 - \hat{K}_{(0)})^{-1} = \hat{G}_0 (1 - \hat{U} \hat{G}_0)^{-1} \quad (4.29a)$$

die in der Form

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \hat{U} \hat{G}_0 \quad (4.29b)$$

aus der Theorie der Greenschen Funktionen wohlbekannt ist (Dyson-Gleichung¹⁾, siehe z.B. [4]).

Der kurze Sinn dieser länglichen Betrachtung bestand einfach darin, folgende Schreibweise für den dynamischen Formfaktor zu motivieren:

$$S_{(0)}(\theta, q) = -2\pi \int \frac{q m^* k_F}{(2\pi\hbar)^2} \text{Im} \langle 1 | \hat{G}_0 \hat{K}_{(0)} | 1 \rangle, \quad \langle s | 1 \rangle := 1 \quad (4.30)$$

die man aus Gl.(23) mit (27) erhält.

¹⁾ Die Dyson-Gleichung enthält eigentlich die Selbstenergie statt des Potentials. Außerdem wird der 2. Summand meist in der Form $\hat{G}_0 \hat{U} \hat{G}$ geschrieben. Das ist aber äquivalent, wenn man auch $\hat{K}_{(0)} = \hat{G}_0 \hat{U}$ schreibt und berücksichtigt, daß per definitionem der Zusammenhang $\hat{G} = [\hat{G}_0^{-1} - U]^{-1}$ besteht.

Aufgrund der Konstanz der zugehörigen Eigenfunktion $\psi_0(s)$ (vgl. (16b)), gilt schließlich für den Eigenwert α_0 des Integraloperators $\hat{K}_{(0)}$

$$\alpha_0 = \frac{1}{-1} \int_{-1}^1 ds' K_{(0)}(s, s') = \frac{F_0}{2} \frac{1}{-1} \int_{-1}^1 ds G_0(s') ; \quad (4.31)$$

für den Vorfaktor gilt

$$2\hbar \frac{q m^* k_F}{(2\pi\hbar)^2} = N \frac{2\hbar}{2\mu} ,$$

so daß unter Verwendung von (17) sich für den dynamischen Formfaktor ergibt:

$$S_{(0)}(\theta, q) = - N \frac{6\hbar}{2\mu F_0} Z \operatorname{Im} \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} \equiv - N \frac{6\hbar}{2\mu F_0} Z \operatorname{Im} \frac{1}{1-\alpha_0} =: N \sigma_{(0)}(\theta, q) \quad (4.32)$$

Die Formel (30) wird im nächsten Kapitel zur Berechnung des dynamischen Formfaktors unter Einbeziehung des Stoßterms wieder verwendet. Es sei nochmals hervorgehoben, daß in die Ableitung der Formel (32) wesentlich einging, daß

1. Φ^{ex} nicht vom Winkel s abhängt;
2. die "linken" Eigenfunktionen $\bar{\psi}_n(s)$ von $\hat{K}_{(0)}$ für $n > 0$ gleich den Legendrepolynomen gewählt werden können;
3. die "rechte" Eigenfunktion $\psi_0(s)$ eine Konstante ist.

Zur Diskussion der Funktion $\sigma_{(0)}(\theta, q)$ - des "reduzierten dynamischen Formfaktors" - für den hier betrachteten Fall, daß der Stoßterm vernachlässigt wird, sei auf Kapitel I verwiesen. Man beachte aber, daß in diesem Fall

$$\sigma_{(0)}(\theta, q) = \sigma_{(0)}(\bar{s}) = - \frac{6\hbar}{2\mu} Z \operatorname{Im} \frac{Q_1(\bar{s} + i\eta)}{1 - F_0 Q_1(\bar{s} + i\eta)} \quad (4.33)$$

(wenn man von Z absieht) nur von $\bar{s} = \frac{\theta}{v_F q}$, nicht aber von θ und q getrennt, abhängt.

V. Dämpfung von Nulltem Schall

In Kapitel IV wurde die Ausbreitung von Nulltem Schall unter Ausschluß von Stößen der Quasiteilchen untersucht. Es zeigte sich, daß man zwei Fälle unterscheiden muß:

1. falls die Phasengeschwindigkeit $\frac{\omega}{q}$ kleiner als die Geschwindigkeit v_F auf der Fermifläche ist, ist die Ausbreitung von Wellen bei allen ω -Werten möglich. Sie sind allerdings stark gedämpft (Landaudämpfung), der dynamische Formfaktor hat in diesem Bereich ein breites Maximum.
2. falls $\frac{\omega}{q}$ größer ist als v_F , gibt es bei einem ganz bestimmten, durch den Wechselwirkungsparameter F_0 festgelegten Wert $c = \langle \frac{\omega}{q} \rangle_d = s_d v_F$ einen scharf definierten Anregungsmodus. Für ihn reservieren wir die Bezeichnung "Nullter Schall". Er ist bei Abwesenheit von Stößen ungedämpft. Der dynamische Formfaktor hat an dieser Stelle eine δ -förmige Spitze und ist im übrigen Bereich $\frac{\omega}{q} > v_F$ Null.

Wir untersuchen jetzt den Einfluß von Stößen auf die Dämpfung. Wie in Kap. IV werden wir zuerst die Eigenwertgleichung und dann den dynamischen Formfaktor betrachten. Dazu benötigen wir das Stoßintegral in der Gl.(4.11) bzw. (4.14a) entsprechenden Form.

1. Matricelemente des Stoßoperators

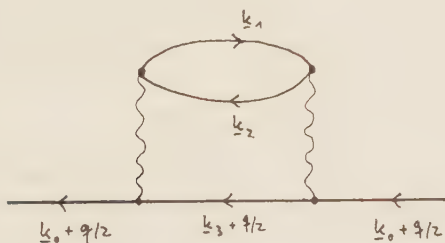
Ausgangspunkt ist das Stoßintegral in (3.37). Die einzelnen Schritte der Weiterverarbeitung verlaufen wie bei der linken Seite (siehe Kap. IV), Einzelheiten dazu werden im Anhang V erläutert. Auf der Stufe von Gl.(4.3) lautet das Stoßintegral, das wir mit $iL[C^+]$ bezeichnen:

$$\begin{aligned}
 iL_{0+0-}[C^+] = & \\
 = -i\frac{\pi}{2} C_{0+0-}^+ \sum_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 \delta(k_0+k_1-k_2-k_3) \cdot \\
 & \{ |\Gamma(0+1,32)|^2 \delta_{\sigma_0+\sigma_1 \sigma_3+\sigma_2} \delta(\varepsilon_{0-}+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\kappa\theta) [n_{0-}n_1(1-n_2)(1-n_3)-vv] + \\
 & + |\Gamma(0-1,32)|^2 \delta_{\sigma_0+\sigma_1 \sigma_3+\sigma_2} \delta(\varepsilon_{0+}+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\kappa\theta) [(1-n_{0+})(1-n_1)n_2n_3-vv] \} \cdot \\
 -i\frac{\pi}{2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 C_{1+1-}^+ \Gamma(0+1-,32) \Gamma(32,0-1+) \delta_{\sigma_0+\sigma_1 \sigma_3+\sigma_2} \cdot \\
 & \{ \delta(k_0+k_1-k_2-k_3+\frac{q}{2}) \delta(\varepsilon_{0-}+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\kappa\theta) [n_{0-}n_1(1-n_2)(1-n_3)-vv] + \\
 & + \delta(k_0+k_1-k_2-k_3-\frac{q}{2}) \delta(\varepsilon_{0+}+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\kappa\theta) [(1-n_{0+})(1-n_1)n_2n_3-vv] \} + \\
 +i\pi \sum_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 C_{3+3-}^+ \Gamma(0+1,3+2) \Gamma(3-2,0-1) \delta_{\sigma_0+\sigma_1 \sigma_3+\sigma_2} \cdot \\
 & \{ \delta(k_0+k_1-k_2-k_3+\frac{q}{2}) \delta(\varepsilon_{0-}+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\kappa\theta) [n_{0-}n_1(1-n_2)(1-n_3+)-vv] + \\
 & + \delta(k_0+k_1-k_2-k_3-\frac{q}{2}) \delta(\varepsilon_{0+}+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\kappa\theta) [(1-n_{0+})(1-n_1)n_2n_3-vv] \} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Die Schreibweise $iL_{0+0-}[C^+]$ soll bedeuten, daß iL_{0+0-} als (rein imaginärer) Integraloperator auf C^+ wirkt. Die Spinindizes an den Vertexfunktionen sind aus Platzgründen unterdrückt, sie sind entsprechend den Impulsargumenten zu ergänzen (vgl.(4.2)).

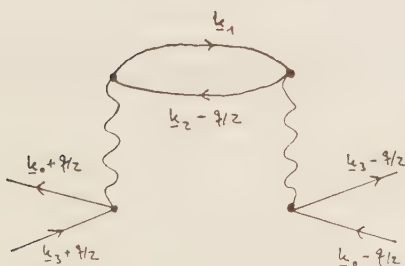
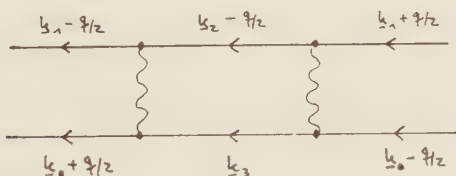
Das Stoßintegral hat also folgende Struktur: es enthält 3 Zweiergruppen von Ausdrücken, wobei sich die Terme einer Zweiergruppe im Vorzeichen von θ , g und dem der Pauliblockierklammer unterscheiden. In der ersten Zweiergruppe steht - im Gegensatz zu den beiden anderen - C^+ außerhalb der Integrationen. Da das einem δ -förmigen Integralkern äquivalent ist, werden wir diese Zweiergruppe den singulären Anteil des Stoßintegrals nennen.

Um die Natur des singulären und der nichtsingulären Anteile besser zu verstehen, betrachten wir die den Potentialmatrixelementen (bzw. den Vertexfunktionen) zugeordneten Graphen (wir beschränken uns auf den ersten Term jeder Zweiergruppe). Dem singulären Anteil entspricht der Graph



(5.2a)

Dem nichtsingulären Anteil entsprechen die Graphen



(5.2b)

Der singuläre Anteil liefert einen (imaginären) Beitrag zur Selbstenergie in (3.30), d.h. zum mittleren Feld. Im Gegensatz dazu beinhalten die beiden nichtsingulären Graphen einen Impulsübertrag $\hbar q$ und stellen also "echte" Stöße dar. Die rechnerischen Details der weiteren Umformungen des Stoßintegrals werden hier übergangen, sie finden sich im Anhang V. Als Ergebnis dieser Umformungen gewinnt Gl.(4.11) die Gestalt

$$(\bar{s}-s_0) \psi(s_0) - \frac{F_0}{2} \int_{-1}^1 ds_1 s_1 \psi(s_1) = iL_{s_0}[\psi] \quad (5.3)$$

mit dem Stoßintegral

$$iL_{s_0}[\psi] = i \frac{\lambda b}{s_0} \left[-\psi(s_0) - \frac{1}{\lambda} \int d\Omega_1 \psi(s_{1q}) f_C(s_{10}) + \frac{2}{\lambda} \int d\Omega_3 \psi(s_{3q}) f_S(s_{30}) \right] \quad (5.4a)$$

Darin bedeutet die Abkürzung b:

$$b = \frac{\pi^2}{32} \left(\frac{k_B T}{2} \frac{k_F}{\mu} \right)^2 \sqrt{2} \frac{\hbar \omega}{2\mu} \left[1 + \left(\frac{\hbar \omega}{2\pi k_B T} \right)^2 \right] \quad (5.4b)$$

Der Zahlenfaktor λ ist das Raumwinkelintegral der Winkelgewichtsfunktion f_C . Diese und die Funktion f_S bringen Eigenschaften des entarteten Fermionensystems zu Ausdruck (s. Kap. II); sie sind im Prinzip in Abhängigkeit von Temperatur und den dynamischen Größen ω und q zu bestimmen. Ein geeigneter Ansatz für diese Funktionen wird im Anhang V diskutiert.

Gl.(4.14a) gewinnt die Gestalt

$$(1 - \hat{K}_{(0)} - i\hat{K}')|\psi\rangle = i\hat{T}^{ex} \quad (5.5a)$$

wobei der Operator $i\hat{K}'$ die Matricelemente hat:

$$i\hat{K}'(s,s') = i \frac{\lambda b}{s(\bar{s}+i\eta-s')} \left\{ -\delta(s-s') + \frac{1}{\lambda} \frac{2\pi}{0} \int d\alpha' [-f_C(s,s',\alpha') + 2f_S(s,s',\alpha')] \right\} \quad (5.5b)$$

Die Größe $\mathcal{A}$, die hier auftritt, ist aus der als konstant angenommenen Vertexfunktion gebildet und läßt sich folgendermaßen durch Parameter $A_0^{(s,a)}$ ausdrücken

$$\mathcal{A}^2 := \langle A_0^{(s)} \rangle^2 + \langle A_0^{(a)} \rangle^2 - \frac{2}{3} A_0^{(s)} A_0^{(a)} \quad (5.6a)$$

die mit den Landauparametern $F_0^{(s,a)}$ über

$$A_0^{(s,a)} = \frac{F_0^{(s,a)}}{1 + F_0^{(s,a)}} \quad (5.6b)$$

zusammenhängen und die Bedeutung einer (konstanten) Streuamplitude haben.

Es ist zu bemerken, daß der Grenzübergang $q \rightarrow 0$ bei $\omega \neq 0$ aufgrund des Faktors $\frac{\omega}{q^2}$ in (4b) offensichtlich nicht zulässig ist (im homogenen Medium gibt es keinen "optischen Phononen-zweig"). Dies gilt auch, wenn man statt $\omega \neq 0$ nur $\frac{\omega}{q} = \text{const}$ verlangt.

Damit hängt auch zusammen, daß im Stoßintegral die Parameter A_0 statt F_0 auftreten. Gleichung (5.6b) entspricht nämlich einerseits der Summation von sogenannten Ringgraphen



im Limes $\omega=0$, $q \rightarrow 0$, andererseits aber auch der Lösung der RPA-Gleichung (4.11) ohne Stoßterm. Die gleiche Summation auch in den mittleren-Feld-Termen vorgenommen, würde zu Doppelzählung führen. Daher verbleiben in diesen Termen die Landauparameter F , während im Stoßintegral die zugehörige Streuamplitude, ausgedrückt durch die Parameter A , auftritt.

Man beachte schließlich das Auftreten des Faktors $[1 + (\frac{\hbar\omega}{2\pi k_B T})^2]$, der schon von Landau aus allgemeinen Überlegungen abgeleitet wurde. Er bedeutet, daß das Stoßintegral für Frequenzen oberhalb der Schwelle $2\pi k_B T$ temperaturunabhängig wird (selbstverständlich muß aber die Bedingung $\hbar\omega < \mu$, die der ganzen hier entwickelten Theorie zugrunde liegt, erfüllt bleiben).

2. Eigenwertgleichung

Das Stoßintegral von Gl.(5.4a) ist von recht komplizierter Struktur. Insbesondere ist es mit der üblichen, bei $T=q=0$ gültigen Form der Gewichtsfunktionen $f_C(s_{10})$ und $f_S(s_{30})$

$$f_C(s_{10}) = \cos^{-1} \frac{\theta_{10}}{2}, \quad f_S(s_{30}) = \sin^{-1} \frac{\theta_{30}}{2} \quad (5.7)$$

nicht separabel, d.h. es läßt sich nicht in der Gestalt $f(s)g(s')$ darstellen. Wir wollen jetzt mit dieser Form von f_C und f_S unter Anwendung der Störungsrechnung die Korrektur 1. Ordnung zu dem dem Nullten Schall entsprechenden Eigenwert s_d berechnen.

Wir gehen aus von Gl.(4.11) mit konstanter Wechselwirkung, die als Eigenwertgleichung geschrieben folgende Gestalt hat:

$$\int_{-1}^1 ds' s' [\delta(s-s') + \frac{F_0}{2}] \psi_s(s') = \bar{s} \psi_s(s) \quad (5.8a)$$

oder in Operatorschreibweise

$$\hat{A}^{(0)} |\bar{s}^{(0)}\rangle = \bar{s}^{(0)} |\bar{s}^{(0)}\rangle \quad (5.8b)$$

Die Matrixelemente des dadurch eingeführten Operators $\hat{A}^{(0)}$ sind durch den Integralkern von (8a) gegeben, der Hochindex (0) soll nullte Ordnung im Sinne der Störungsrechnung bedeuten. Im Kapitel IV wurde gezeigt, daß die Eigenwerte $\bar{s}^{(0)}$ von $A^{(0)}$ im Intervall $[0,1]$ kontinuierlich sind, und daß darüberhinaus ein diskreter Eigenwert $\bar{s}^{(0)} = s_d > 1$ existiert, der durch die Dispersionsrelation (1.28a) festgelegt ist. Für den diskreten Eigenwert kann man den üblichen Formalismus der Rayleigh-Schrödinger - Störungsrechnung bemühen. Dabei muß man aber bedenken, daß der Operator $\hat{A}^{(0)}$ in Gl.(8b) nicht hermitesch ist. Daß hat zur Folge, daß die Eigenfunktionen $\psi_s^{(0)}(s)$ mit einer (von der Identität verschiedenen) Gewichtsfunktion orthonormiert werden müssen - oder, äquivalent dazu, daß man zwischen "rechten" und "linken" Eigenfunktionen unterscheiden muß. Wir werden diese Unterscheidung hier nicht treffen (im Gegensatz zu Kap. IV), sondern zur Illustration die Gewichtsfunktion explizit als Operator in Gl.(8b) einführen.

In Anhang IV wird gezeigt, daß die $\psi_{\bar{s}}^{(0)}$ folgendermaßen zu orthonormieren sind

$$\int_{-1}^1 ds \psi_{\bar{s}_1}^{(0)}(s) s \psi_{\bar{s}_2}^{(0)}(s) = \delta_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \quad (5.9a)$$

oder

$$\langle \bar{s}_1^{(0)} | \hat{N} | \bar{s}_2^{(0)} \rangle = \delta_{\bar{s}_1 \bar{s}_2} \quad (5.9b)$$

wenn man den Gewichtsoperator $\hat{N}$ definiert durch

$$N(s, s') = s \delta(s - s') \quad (5.9c)$$

($\langle \bar{s}^{(0)} | \hat{N} | s \rangle$ entspricht der "linken" Eigenfunktion). Wir multiplizieren (8b) von links mit $\hat{N}$ und erhalten

$$\hat{B}^{(0)} | \bar{s}^{(0)} \rangle = \bar{s}^{(0)} \hat{N} | \bar{s}^{(0)} \rangle \quad (5.10)$$

mit dem hermiteschen Operator $\hat{B}^{(0)} = \hat{N} \hat{A}^{(0)}$ (dessen Matrixelemente natürlich durch den Integralkern von (8a), multipliziert mit s , gegeben sind). In dieser Formulierung fügen wir jetzt den aus dem Stoßintegral abgeleiteten Operator $\hat{B}'$, den wir als kleine Korrektur zu $\hat{B}^{(0)}$ auffassen, ein. Aus (10) wird dann

$$(\hat{B}^{(0)} + \hat{B}') | \bar{s} \rangle = \bar{s} \hat{N} | \bar{s} \rangle \quad (5.11a)$$

bzw. nach der üblichen Entwicklung, die wir bis zur ersten Ordnung durchführen,

$$\hat{B}^{(0)} | \bar{s}' \rangle + \hat{B}' | \bar{s}^{(0)} \rangle = \bar{s}^{(0)} \hat{N} | \bar{s}' \rangle + \bar{s}' \hat{N} | \bar{s}^{(0)} \rangle \quad (5.11b)$$

Wir setzen nun $| \bar{s}^{(0)} \rangle = | s_d \rangle$. Durch Multiplikation von links mit $\langle s_d |$ ergibt sich wegen der Hermitizität von $\hat{B}^{(0)}$ und unter Ausnutzung der Gleichungen (10) und (9b):

$$\langle s_d | \hat{B}' | s_d \rangle \equiv \int_{-1}^1 ds \langle s_d | s \rangle \langle s | \hat{B}' | s_d \rangle = s_d' \langle s_d | \hat{N} | s_d \rangle = s_d' \quad (5.12)$$

Es ist zu beachten, daß der Operator $\hat{N}$ im Matrixelement von $\hat{B}'$ nicht vorkommt, daß also die gewohnte Beziehung zwischen dem Störoperator und der Korrektur erster Ordnung des Eigenwerts besteht.

Die explizite Gestalt der Funktion $\langle s | \hat{B}' | s_d \rangle$ folgt aus Gl.(4a) unter Berücksichtigung der Tatsache, daß sich $\hat{B}'$ aus dem zu (4a) gehörigen Operator durch Multiplikation mit $\hat{N}$ ergibt (der Index s_d an $\psi^{(0)}$ wird im folgenden weggelassen):

$$\langle s | \hat{B}' | s_d \rangle = i\lambda b \left[-\psi^{(0)}(s) - \frac{1}{\lambda} \int d\Omega_1 \frac{\psi^{(0)}(s_{1q})}{\cos \frac{\theta_{10}}{2}} + \frac{2}{\lambda} \int d\Omega_3 \frac{\psi^{(0)}(s_{3q})}{\sin \frac{\theta_{30}}{2}} \right] \quad (5.13)$$

Der Faktor λ hat hier den Wert 8π , wir erhalten somit für (12):

$$s_d' = i8\pi b \int_{-1}^1 ds \left[-\psi^{(0)2}(s) - \frac{\psi^{(0)}(s)}{2} \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{\psi^{(0)}(s_{1q})}{\cos \frac{\theta_{10}}{2}} + \psi^{(0)}(s) \int \frac{d\Omega_3}{4\pi} \frac{\psi^{(0)}(s_{3q})}{\sin \frac{\theta_{30}}{2}} \right] \quad (5.14)$$

Die Funktion $\psi^{(0)}(s)$ ist nach Gl.(1.27):

$$\psi^{(0)}(s) = \frac{1}{2} \frac{B(s_d)}{s_d - s}, \quad B(s_d) = [10_1(s_d)]^{1/2}$$

(Q_1' ist die Ableitung der 1. Legendrefunktion 2. Art, diese Größe ist in $[1, \infty]$ negativ).

Die Integrationen in der eckigen Klammer von (14) führen auf elliptische Integrale, die sich nur numerisch auswerten lassen. Es ist jedoch möglich, einen für große s_d gültigen, analytischen Näherungsausdruck für s_d' zu erhalten, wenn man in (14) den Integranden nach diesem Parameter entwickelt. Wir werden dabei die ersten drei Glieder dieser Entwicklung berücksichtigen.

Das erste Integral in (14) ist sehr einfach zu berechnen:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{-1}^1 ds \psi^{(0)2}(s) = \frac{B^2(s_d)}{4} \int_{-1}^1 ds \frac{1}{(s_d - s)^2} = \frac{B^2}{4} \frac{2}{s_d^2 - 1} \approx \\ &\approx \frac{B^2}{4s_d^2} \int_{-1}^1 ds \left[1 + 3\frac{s^2}{s_d^2} + 5\frac{s^4}{s_d^4} \right] = \frac{B^2}{2s_d^2} \left(1 + \frac{1}{s_d^2} + \frac{1}{s_d^4} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Im zweiten Integral formen wir den cos um und erhalten

$$I_2 := \int_{-1}^1 ds \frac{\psi^{(0)}(s)}{2} \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta_{10}}} \psi^{(0)}(s_{1q})$$

Dabei bedeutet θ_{10} den Polarwinkel des Wellenvektors $\underline{k}_1$ bzgl. der Achse $\underline{k}_0$, θ_{1q} den Polarwinkel von $\underline{k}_1$ bzgl. $\underline{q}$ (vgl. die im Anhang V angegebene Stoßgeometrie). Um die Entwicklung nach s_d durchzuführen, wählen wir $d\Omega_1 = ds_{10} d\alpha_{10} =: d\Omega'$ und drücken s_{1q} durch $s_{10} =: s'$, $s_{0q} \equiv s$ und die zugehörigen Azimute aus vermöge (A5.8) (es sei $\alpha_{0q} \equiv 0 \Rightarrow \alpha_{q0} = \pi$):

$$s_{1q} = ss' - \sqrt{1-s^2} \sqrt{1-s'^2} \cos \alpha'$$

sodaß das zweite Integral die Gestalt annimmt

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{8} B^2(s_d) \int_{-1}^1 ds \frac{1}{s_d - s} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \sqrt{\frac{1}{1+s'}} \frac{1}{s_d - s_{1q}}$$

Durch Entwicklung nach s_d erhält man elementar integrierbare Ausdrücke, das Ergebnis lautet

$$I_2 = \frac{B^2}{2s_d^2} \left(1 + \frac{5}{9} \frac{1}{s_d^2} + \frac{89}{225} \frac{1}{s_d^4} \right) \quad (5.16)$$

Im dritten Integral treten die Winkel $\theta_{30} = (\underline{k}_3, \underline{k}_0)$ und $\theta_{3q} = (\underline{k}_3, \underline{q})$ auf, wir wählen $\underline{k}_0$ als Achse der Ω_3 -Integration, drücken $s_{3q} = \cos\theta_{3q}$ durch die Winkel bezüglich dieser Achse aus und erhalten, analog zum zweiten Integral vorgehend:

$$I_3 := \int_{-1}^1 ds \psi^{(0)}(s) \int \frac{d\Omega_3}{4\pi} \frac{\psi^{(0)}(s_{3q})}{\sin \frac{\theta_{30}}{2}} \approx \frac{B^2}{s_d^2} \left(1 + \frac{7}{9} \frac{1}{s_d^2} + \frac{149}{225} \frac{1}{s_d^4} \right) \quad (5.17)$$

Es zeigt sich, daß sich in der Summe aus (15) bis (17) die ersten beiden Glieder wegheben und erst der s_d^{-6} -Term einen Beitrag liefert, sodaß

$$s'_d = -ib B^2(s_d) \frac{64\pi}{225} \frac{1}{s_d^6} \quad (5.18)$$

Um schließlich s'_d zu bestimmen, wird die Normierungskonstante $B^2(s_d)$ nach s_d entwickelt

$$B^2(s_d) = 3s_d^3 - \frac{18}{5} s_d \pm \dots \quad (5.19a)$$

außerdem kann man in der Konstanten b noch einen Faktor $\bar{s}$ isolieren

$$b = \frac{1}{128} \frac{k_F}{q} \mathcal{A}^2 \bar{s} \left[\left(\frac{\hbar q}{2\mu} \right)^2 + \left(\frac{2\pi k_B T}{2\mu} \right)^2 \right] \quad (5.19b)$$

Wir setzen b an der Stelle $\bar{s} = s_d$ ein und erhalten das Ergebnis

$$s'_d = -i \frac{\pi}{150} \frac{k_F}{q} \mathcal{A}^2 \left[\left(\frac{\hbar q}{2\mu} \right)^2 + \left(\frac{2\pi k_B T}{2\mu} \right)^2 \right] \frac{1}{s_d^2} \quad (5.20)$$

Wir stellen fest, daß die durch den Stoßterm bewirkte Korrektur zum Eigenwert s_d in erster Ordnung rein imaginär und negativ ist (so daß ein gedämpfter kollektiver Eigenszustand resultiert), und daß sie ferner für hinreichend große s_d proportional zu s_d^{-2} abfällt. Das ist in Übereinstimmung mit den herkömmlichen Ergebnissen für die inverse Eindringtiefe $s'_d q v_F / c$ (vgl. etwa [14], c ist die Schallgeschwindigkeit).

Die bei der Berechnung des Stoßintegrals (siehe S. 35) verwendete Annahme $|\theta'| < |\theta|$ ($-i\theta' = q v_F s'_d$) ist in beiden Fällen gut erfüllt.

Eine wesentlich bessere Näherung für I_2 und I_3 kann man erhalten, wenn man $\cos \frac{\theta}{2}$ und $\sin \frac{\theta}{2}$ mit Hilfe der erzeugenden Funktion der Legendrepolynome ausdrückt. Nach Entwickeln der Legendrepolynome nach Kugelfunktionen kann man die Integrale ausführen und erhält das Ergebnis in Form einer unendlichen Summe über Legendrefunktionen zweiter Art:

$$I_2 = 2B^2(s_d) \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n Q_n^2(s_d) \quad (5.21a)$$

$$I_3 = 4B^2(s_d) \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^2(s_d) \quad (5.21b)$$

Bei $s_d = 1.994$ genügt es, die Summen bis $n=3$ zu berechnen; man erhält dann für s'_d :

$$s'_d = -ib B^2(s_d) \cdot .0078\pi \quad (5.22)$$

Man kann nun den dynamischen Formfaktor berechnen, indem man $\bar{s} + s_d'^*$ in Formel (4.32) einsetzt (α_0 ist durch (4.16a) gegeben; damit der Formfaktor positiv ist, muß man das konjugiert Komplexe von s_d' einsetzen). Der Formfaktor in dieser Näherung ist in Kap. VI, Abbildung 1-3, für verschiedene Parameterwerte gezeigt.

Abschließend ist darauf hinzuweisen, daß die Eigenschaft von Gl.(18), daß sich in der Entwicklung nach $1/s_d$ die Glieder mit s_d^{-2} und s_d^{-4} wegheben, entscheidend von der Näherung abhängt, daß alle am Stoßprozeß beteiligten Impulse exakt auf der Fermifläche liegen. Nur dann ergeben sich genau die in (7) angegebenen Gewichtsfunktionen der Raumwinkelintegrationen. Läßt man aufgrund endlicher Temperatur sowie der kollektiven Dynamik (ϕ, q) für die Impulsbeträge einen Spielraum à la Gl.(2.9) zu, so ergeben sich Korrekturen zu diesen Gewichtsfunktionen. Man kann dann nicht mehr erwarten, daß in den drei Raumwinkelintegralen von (4a) die einzelnen Glieder der Entwicklung nach $1/s_d$ gerade so beitragen, daß sich die Glieder s_d^{-2} und s_d^{-4} wegheben. Verwendet man bei $T \neq 0$, $\phi \neq 0$, $q \neq 0$ die im Anhang V.2 angegebenen Gewichtsfunktionen, so ändert sich der Faktor λ auf $\lambda = 7.9\pi$ und der erste Term in der Entwicklung von s_d' nach s_d ist (siehe auch (35) an der Stelle $\bar{s}=s_d$):

$$s_d' = -ib B^2(s_d) \frac{769\pi}{300} \frac{1}{s_d} \quad (5.23a)$$

(der Term proportional zu s_d^{-2} hebt sich auch dann weg, wenn man - als Extremfall - die Gewichtsfunktionen konstant gleich Eins setzt).

Man kann in diesem Fall s_d' auch exakt ausrechnen und erhält nach Einsetzen von $s_d = 1.994$

$$s_d' = -ib B^2(s_d) \cdot .0166\pi \quad (5.23b)$$

3. Der dynamische Formfaktor

Betrachtet man die Gl.(3) und (4a), so fällt auf, daß die Struktur der Gl.(4.11) als Integralgleichung über φ durch den singulären Anteil des Stoßintegrals allein, unter Vernachlässigung der übrigen Anteile, nicht wesentlich verändert wird: die Gl.(3) allein mit dem singulären Anteil des Stoßintegrals sollte wie Gl.(4.11) eine exakte Berechnung der Resolvente und des dynamischen Formfaktors gestatten, während dies mit dem vollen Stoßintegral nicht möglich ist (siehe unten).

Leider ist aber die Struktur des Stoßintegrals für eine solche Aufspaltung, in der der singuläre Anteil exakt und der nichtsinguläre als Störung behandelt wird, ungeeignet. Wie der vorige Abschnitt dieses Kapitels gezeigt hat, kompensieren sich der singuläre und die nichtsingulären Anteile weitgehend. Diese Kompensation würde durch eine derartige Aufspaltung zerstört, was zu einer wesentlich zu starken Dämpfung führen würde. Außerdem würde das asymptotische Verhalten bei $\bar{s} \rightarrow 0$ derart verändert, daß der Formfaktor in diesem Limes eine unphysikalische Divergenz zeigen würde.

Zur Berechnung des Formfaktors gehen wir also aus von der Gl.(5a)

$$(1 - \hat{K}_{(0)} - i\hat{K}')|\psi\rangle = |q^{\text{ex}}\rangle$$

$\hat{K}'$ bezeichnet den vollen Stoßoperator, dessen Matrixelemente durch (5b) gegeben sind. Für das weitere wird die Abkürzung

$$F_{CS}(s, s') = \int_0^{2\pi} d\alpha' [-f_C(s, s', \alpha') + 2f_S(s, s', \alpha')] \quad (5.24)$$

eingeführt. Das Auftreten des Faktors s im Nenner von iK' verhindert eine exakte Behandlung des gesamten Integralkerns $K_{(0)} + iK'$ nach dem Muster von Kap. IV.2. Darüberhinaus hat iK' aufgrund dieses Faktors die unschöne Eigenschaft, die sogenannte Hilbert-Schmidt - Bedingung

$$\text{Sp } \hat{K}' \hat{K}'^\dagger < \infty \quad (5.25)$$

zu verletzen; außerdem ist der gesamte Integralkern, sofern man für f_C und f_S den Ansatz (7) wählt, wegen des Faktors F_{CS} nicht mehr separabel.

Zur Berechnung des dynamischen Formfaktors werden wir deshalb auf Gl.(4.30) zurückgreifen, d.h. es ist die Resolvente $\hat{R}$ von (5a)

$$\hat{R} = (1 - \hat{K}_{(0)} - i\hat{K}')^{-1} \quad (5.26)$$

zu berechnen. Es sei daran erinnert, daß die zugeordnete Greensche Funktion durch Gl.(4.25) gegeben ist. Zur Berechnung von $\hat{R}$ verwenden wir nun eine Formel aus [11]. Diese benützt, daß $\hat{K}_{(0)}$ separabel, d.h. in der Form

$$\hat{K}_{(0)} = \alpha_0 |\psi_0\rangle \langle \bar{\psi}_0| \quad (5.27)$$

mit den Eigenfunktionen aus (4.16b) darstellbar ist. Wir führen jetzt die Bezeichnungen ein

$$\hat{R}' := (1 - i\hat{K}')^{-1} \quad (5.28a)$$

sowie

$$m := 1 - \alpha_0 \langle \bar{\psi}_0 | \hat{R}_{ns} | \psi_0 \rangle \quad (5.28b)$$

Dann kann man, ausgehend von der Identität

$$\hat{R}' = \hat{R}(1 - \hat{K}_{(0)} - i\hat{K}')\hat{R}' = \hat{R}(1 - \hat{K}_{(0)}\hat{R}') \quad ,$$

durch Multiplikation von rechts mit $1 + \alpha_0 \frac{|\psi_0\rangle \langle \bar{\psi}_0|}{m} \hat{R}'$ und einige Umformungen $\hat{R}$ auf folgende Form bringen

$$\hat{R} = \hat{R}' + \hat{R}' \frac{\hat{K}_{(0)}}{m} \hat{R}' \quad (5.29)$$

Diese Formel ist zur Berechnung von $\hat{R}$ nützlich, wenn man entweder $\hat{R}'$ kennt oder dieses in einer vernünftigen Näherung berechnen kann.

Wir kennen $\hat{R}'$ nicht. Der naheliegende Weg, $\hat{R}'$ durch seine Spektraldarstellung zu ermitteln, ist nicht gangbar; da $i\hat{K}'$ die Hilbert-Schmidt - Bedingung (25) verletzt, kann man nicht erwarten, daß $i\hat{K}'$ ein vollständiges Eigenfunktionssystem besitzt. Wir können aber $\hat{R}'$ in die Bornsche Reihe entwickeln. Die Beobachtung, daß $i\hat{K}'$ proportional zu b ist, läßt erwarten, daß für gewisse Bereiche der Parameter T , q und ω die Bedingung für die Konvergenz der Bornschen Reihe

$$|\alpha'| < 1 \quad (5.30)$$

erfüllt ist (α' soll den größten Eigenwert von $i\hat{K}'$ bezeichnen).

Wir beschränken uns im weiteren auf die 1. Bornsche Näherung, in der die Resolvente $\hat{R}'$ durch

$$\hat{R}' \approx 1 + i\hat{K}' \quad (5.31)$$

gegeben ist. Die Pole von $\hat{R}$ sind dann einzig durch die Nullstellen von m bestimmt, das in dieser Näherung die Gestalt hat

$$m = 1 - \alpha_0 - \alpha_0 \langle \bar{\Psi}_0 | i\hat{K}' | \Psi_0 \rangle =: 1 - \alpha_0 - iA' \quad (5.32)$$

Die Resonanzbedingung $\alpha_0 = 1$ wird also durch das Matricelement von $i\hat{K}'$, das wir hier mit iA' abgekürzt haben, modifiziert. Mit (4.16b), (4.14b) und (5b) ergibt sich für iA'

$$\begin{aligned} iA' &= \alpha_0 \frac{1}{\alpha_0} \int_{-1}^1 ds ds' K_{(0)}(s', s) iK'(s, s) = \\ &= i\lambda b \frac{F_0}{2} \int_{-1}^1 ds ds' \frac{s}{\bar{s} + i\eta - s} \{ -\delta(s-s') + \frac{1}{\lambda} F_{CS}(s, s') \} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Anders als in Abschnitt 2 dieses Kapitels wählen wir jetzt für die in F_{CS} auftretenden Winkelgewichtsfunktionen f_C und f_S einen Ansatz, der endlicher Temperatur und endlichem ω und q besser angepasst ist als der dort verwendete. Er wird außerdem so einfach gewählt, daß die Integrationen in iA' analytisch ausführbar sind (siehe die Diskussion in Anhang V; hier $s' = \hat{s}_{1q}$):

$$F_{CS}(s, s') = \frac{2\pi}{\alpha_0} [3a_3 s_{10}^3 + a_2 s_{10}^2 + 3a_1 s_{10} + a_0] \quad (5.34)$$

mit $a_3 = a_1 = 1.15$, $a_2 = 1.9875$, $a_0 = 1.3125$, $s_{10} = ss' + \sqrt{1-s^2} \sqrt{1-s'^2} \cos \alpha'$

Man erhält damit für iA' im Bereich $\bar{s} > 1$ den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} iA'(\bar{s}) &= i 4\pi b \left[(15a_3 \bar{s}^4 + (3a_2 - 8a_3) \bar{s}^2 + \frac{14}{3} a_3 + 6a_1) Q_1^2(\bar{s}) - \right. \\ &\quad \left. - 2[5a_3 \bar{s}^2 - \frac{4}{3} a_3 + a_2] Q_1(\bar{s}) \bar{s} Q_0(\bar{s}) + \right. \\ &\quad \left. + [\frac{5}{3} a_3 \bar{s}^2 + 2a_0 + a_2] Q_0^2(\bar{s}) - \frac{79}{20} \frac{1}{\bar{s}^2 - 1} \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dieser Ausdruck ist rein imaginär. Im Bereich $\bar{s} < 1$ kommen zusätzliche reelle und imaginäre Terme dazu.

Aufgrund des Terms iA' hat $\hat{R}$ im Gegensatz zu $\hat{R}_{(0)}$ (vgl. (4.17)) überhaupt keinen Pol auf der reellen Achse mehr. Allerdings ist für kleine iA' (d.h. für kleine b) eine polähnliche Resonanz in der Nähe von $\alpha_0 = 1$ zu erwarten. Das entspricht genau einem gedämpften Nullten Schall.

Der die Resonanz liefernde Ausdruck $\text{Im } \frac{1}{m}$ entspricht formal einer Lorentzkurve bezüglich der Variablen α_0 :

$$\text{Im } \frac{1}{m} = \frac{A'}{(1-\alpha_0)^2 + A'^2} \quad (5.36)$$

mit dem Breiteterm A'^2 . Jedoch ist zu beachten, daß sowohl α_0 als auch A' von $\bar{s}$ bzw. der Energie $\hbar\omega$ abhängen (A' via den Faktor b), wodurch die Resonanzkurve bezüglich $\hbar\omega$ keinen Lorentzcharakter hat und sich das Resonanzmaximum gegenüber dem Pol $\alpha_0 = 1$ (bei $A' = 0$) verschiebt.

Zur Berechnung des dynamischen Formfaktors gemäß (4.30) ist das folgende Matricelement zu bilden:

$$\begin{aligned} \langle 1 | \hat{G}_{(0)} \hat{R} | 1 \rangle &= \int_{-1}^1 ds ds' \frac{s}{\bar{s} - s + i\eta} R(s, s') = \\ &= \frac{2}{F_0} \int_{-1}^1 ds ds' K_{(0)}(s', s) R(s, s') \end{aligned} \quad (5.37)$$

Die Matricelemente $R(s, s')$ sind nach Gl. (29) und (31) gegeben durch

$$\begin{aligned} R(s, s') &= \delta(s-s') + iK'(s, s') + \\ &+ \frac{1}{m} \{ K_{(0)}(s, s') + \int_{-1}^1 ds_1 ds_2 iK'(s, s_1) K_{(0)}(s_1, s_2) iK'(s_2, s') + \\ &+ \int_{-1}^1 ds_1 [iK'(s, s_1) K_{(0)}(s_1, s') + K_{(0)}(s, s_1) iK'(s_1, s')] \} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Dies bedeutet, daß alle in (37) vorkommenden Integrale entweder die Form (33) oder (4.31) haben, so daß sich der dynamische Formfaktor durch α_0 und iA' ausdrücken läßt. Mit der Bezeichnung

$$F_{\alpha A} := \alpha_0 + iA' \quad (5.39)$$

gewinnt deshalb der "reduzierte" dynamische Formfaktor $\sigma(\omega, q)$ die Gestalt

$$\sigma(\omega, q) = -\frac{3\hbar}{2\mu} \text{Im } \langle 1 | \hat{G}_{(0)} \hat{R} | 1 \rangle = -\frac{3\hbar}{\mu F_0} \text{Im } \frac{F_{\alpha A}}{1 - F_{\alpha A}} \equiv -\frac{6\hbar}{2\mu F_0} \text{Im } \frac{1}{1 - F_{\alpha A}} \quad (5.40)$$

Die Graphen dieser Funktion werden im nächsten Kapitel für verschiedene Parameterwerte vorgestellt.

VI. Der dynamische Formfaktor in ^3He

In diesem Kapitel wird der dynamische Formfaktor von normalem flüssigen ^3He , wie ihn unsere Theorie liefert, dargestellt und diskutiert. Die den folgenden graphischen Darstellungen zugrundeliegenden Formeln sind (5.40) und (4.32). Aufgetragen ist der "reduzierte" dynamische Formfaktor $\sigma(\omega, q)$ über der Frequenz ω , die auf $\hbar/2\mu$ normiert ist (die Herleitung des Formfaktors empfiehlt diese Normierung als die natürlichste, vgl. (5.4b)). Der Betrag des Wellenvektors q (normiert auf k_F) und die Temperatur T (normiert auf $\frac{k_B}{2\mu}$) dienen als Parameter, und zwar werden für einen bestimmten Wert von q jeweils mehrere Werte von T gezeigt. $\sigma(\omega, q)$ selbst hat aufgrund des Faktors $\hbar/2\mu$ die Dimension einer Zeit ($\hbar/\mu$ ist die Zeit, die man mindestens benötigt, um die Energie μ messend festzulegen), wir tragen $\frac{2\mu}{\hbar}\sigma$ auf.

Um zu numerischen Ergebnissen zu gelangen, müssen Zahlenwerte für die Landauparameter $F_0^{(s)}$ und $F_0^{(a)}$ eingesetzt werden. Wir verwenden die auf S.18 tabellierten, experimentellen Werte $F_0^{(s)}=10.07$, $F_0^{(a)}=-.672$, die bei verschwindendem Druck gültig sind und aus denen $A_0^{(s)}=.9097$, $A_0^{(a)}=-2.053$ folgt (siehe Gl.(5.6b), die angegebenen Kommastellen sind notwendig, um $F_0^{(s)/(a)}$ auf die angegebenen Kommastellen zu reproduzieren). Die Phasengeschwindigkeit des Nullten Schalls (ohne Stoßterm) liegt dann bei $s_0=1.994$, und die Referenzgrößen für die Energie $\hbar\omega$, bzw. die Frequenz ω , den Wellenvektor q und die Temperatur T haben die Werte: $2\mu = .27\text{meV}$, $\frac{2\mu}{\hbar} = 4.11 \cdot 10^{11}\text{Hz}$, $k_F = .79\text{\AA}^{-1}$, $\frac{2\mu}{k_B} = 3.13\text{K}$.

- In jeder Zeichnung ist der Formfaktor für drei verschiedene Fälle aufgetragen:
- a) unter Vernachlässigung des Stoßintegrals (gestrichelt), der δ -förmige Anteil für $\bar{s} \geq 1$ erscheint als senkrechte Linie bei $\bar{s}=s_0$;
 - b) Stoßintegral in Störungsrechnung (punktiert);
 - c) mit dem Stoßintegral gemäß V.3 (strichpunktiert bzw. durchgezogene Linie unter Verwendung der Winkelgewichtsfunktionen (A5.12) bzw. (A5.17)).

Wir lassen den Wert der Größe q/k_F variieren von .02 (Abb. 1 - 3) über .1 (Abb. 4 - 6) bis .608 (Abb. 7). Der letzte Wert, der schon an die Grenze des Gültigkeitsbereichs unserer Theorie (die $q/k_F \ll 1$ fordert) kommt, wird gewählt, um einen Vergleich mit Messungen von Hilton et. al. [17] zu ermöglichen. Der für eine bestimmte Zeichnung gewählte Wert von q/k_F läßt sich übrigens direkt aus der Zeichnung ablesen; er liegt da, wo der kontinuierliche Anteil der Kurve a) zur ω -Achse zurückkehrt, dort ist nämlich in der

in der Formel $\bar{s}_d = \frac{\hbar \omega}{2\mu} = \frac{\hbar \omega}{2\mu} \bar{s} = 1$ zu setzen. Es muß bemerkt werden, daß im Gegensatz zu den q -Werten die ω -Werte in Abb. 7 den Gültigkeitsbereich unserer Theorie (der spätestens bei $\frac{\hbar \omega}{2\mu} = .5$ endet) weit überschreiten, da die "Resonanz" des Nullten Schalls mit wachsendem q zu immer größerem ω wandert.

Bezüglich der Variation der Temperatur spielt die Größe $2\pi k_B T$ eine wichtige Rolle, da sie die ungefähre Grenze der Abhängigkeit von T markiert. Gl.(5.4b) zeigt, daß für Frequenzen weit unterhalb dieser Schwelle der Faktor b (durch den die Temperaturabhängigkeit ins Spiel kommt) proportional zu ω^2 ist, während er weit oberhalb proportional zu ω^3 und temperaturunabhängig ist. Der Grund dafür ist, daß für $\hbar \omega > 2\pi k_B T$ die Rolle der diffusen Zone der Fermiverteilung $\hbar \omega$ übernommen wird. Es ist also zu erwarten, daß eine Temperaturabhängigkeit der Kurven b) und c) nur dann zu sehen ist, wenn die Resonanz bei $\hbar \omega$ -Werten liegt, die über diese Schwelle nicht wesentlich hinausgehen.

In den Abbildungen 1 - 3 liegt die Resonanz des Nullten Schalls bei einem so kleinen Wert von $\hbar \omega$ ($\hbar \omega_d = s_d q / K_F \approx .04$), und auch die Parameter q und T sind so klein, daß die Verwendung der angepaßten Winkelgewichtsfunktionen (A5.17) nicht angemessen ist. Kurve b) und c) sind deshalb mit den Gewichtsfunktionen (A5.12) unter Verwendung von (5.22) bzw. (5.21) (ohne die Spezifizierung $\bar{s} = s_d$) berechnet. Dagegen sind b) und c) in den Abbildungen 4 - 7 mit (A5.17) unter Verwendung von (5.23b) und (A5.18) berechnet.

Wir kommentieren jetzt die Zeichnungen im Einzelnen.

Abb. 1: $\frac{q}{K_F} = .02$, $\frac{k_B T}{2\mu} = .001$. Bei diesen kleinen Werten des Wellenvektors und der Temperatur ist die "Aufweichung" der δ -Funktion bei s_d noch so gering, daß eine logarithmische Darstellung notwendig ist. Die Resonanz des Nullten Schalls bildet hier eine extrem schmale Spitze (Halbwertsbreite aus den errechneten Werten: $\Delta \hbar \omega / 2\mu = .00013$), deren Maximum um der Deutlichkeit willen in der kleinen Abbildung im rechten oberen Eck vergrößert dargestellt ist. Man sieht, daß das Maximum gegenüber dem ungedämpften Fall um einen geringen Betrag nach rechts verschoben ist (auch die Störungsrechnung liefert diesen Effekt). Beiderseits der Resonanz fällt der Formfaktor schnell auf Werte ab, die gegenüber dem Maximum der Resonanz vernachlässigbar klein sind - dieses Verhalten zeigt sich auch in den folgenden vier Abbildungen. Es erklärt sich daraus, daß die in Kohärenzen $2p-2h$ - Anregungen, die durch unser Stoßintegral ins Spiel kommen, bei

so niedrigen Parameterwerten abseits der unmittelbaren Resonanz des Nullten Schalls (der eine Kohärenz 1p-1h - Anregung darstellt) aufgrund des Pauliprinzipis keine Rolle spielen (siehe hierzu z.B. [3]).

Die Übereinstimmung von Störungsrechnung und "exakter" Rechnung ist sehr gut, bemerkenswerterweise auch noch deutlich abseits von k_0 . Insbesondere sind im Bereich $k_0/2\mu < .02$ ($\bar{\epsilon} < 1$) alle drei Kurven praktisch identisch, die Dämpfung wird hier durch inkohärente 1p-1h - Anregungen bewirkt (Landaudämpfung).

Abb. 2: $\frac{q}{k_F} = .02$, $\frac{k_B T}{2\mu} = .01$. Erhöht man - von Abb. 1 ausgehend - die Temperatur, so ergibt sich zunächst nur eine Verbreiterung der Resonanzen (Halbwertsbreite von c): $\Delta k_0/2\mu = .00044$, aber sonst keine wesentliche Änderung in der Gestalt der Kurven. Bei der hier gewählten logarithmischen Darstellung ist aber c) für $\bar{\epsilon} \pm 1$ merklich von a) verschieden, und auch die Störungsrechnung stellt keine so gute Näherung an c) mehr dar. In einem kleinen Bereich um $\bar{\epsilon} \approx 0$ und $\bar{\epsilon} < 1$ wird der dynamische Formfaktor mit Stoßintegral negativ (zur Darstellbarkeit auf der logarithmischen Achse wird er in diesem Fall gleich 10^{-6} gesetzt). Dies läßt sich aus der Struktur des Stoßintegrals dadurch begründen, daß im ersten Bereich der Anteil I_2 , im zweiten der singuläre Anteil I_1 (vgl. Gl.(5.15)) dominiert und stark negativ wird. Bei genügend hoher Temperatur überkompensiert dann der Imaginärteil des Stoßintegrals den von α_0 (vgl. Gl.(4.16a)). Dieses Verhalten tritt bei höheren Temperaturen systematisch in allen Abbildungen auf.

Abb. 3: $\frac{q}{k_F} = .02$, $\frac{k_B T}{2\mu} = .05$. Diese Temperatur ist in unserem Modell als hoch zu betrachten; in der Abbildung ist zwar noch ein Maximum vorhanden, das sich klar über den Untergrund erhebt, im Vergleich zu den vorhergehenden Abbildungen ist der Nullte Schall aber schon sehr stark gedämpft; ferner ist das Maximum wesentlich stärker nach rechts verschoben. Im Bereich $\bar{\epsilon} < 1$ ist jetzt die Störungsrechnung im Vergleich zu Abb. 1 und 2 ziemlich schlecht.

Abb. 4: $\frac{q}{k_F} = .1$, $\frac{k_B T}{2\mu} = .01$. Wir beginnen - bei einem um den Faktor 5 vergrößerten Wellenvektor - wieder mit einer niedrigen Temperatur. Die ganze Dynamik erscheint im Vergleich zu Abb. 1 - 3 auf der Frequenzskala um einen Faktor 5 gedehnt. Außerdem werden jetzt die angepaßten Winkelgewichtsfunktionen verwendet. Diese sowie der größere

q-Wert bewirken, daß hier die Dämpfung, d.h. die Ankopplung an die inkohärenten $2p-2h$ - Anregungen schon wesentlich stärker ist als in Abb. 1 und 2 (Halbwertsbreite von c): $\Delta\epsilon_0/2\mu = .0075$; da auf dieser ϵ -Skala $2\pi k_B T$ sehr klein ist, ändern sich die Kurven mit sinkendem T nicht mehr erkennbar.

Abb. 5: $\frac{q}{k_F} = .1$, $\frac{k_B T}{2\mu} = .05$. Hier gilt analog das zu Abb. 3 und 4 Gesagte. Zum Vergleich ist hier und in den folgenden beiden Abbildungen auch der Formfaktor mit den nicht angepaßten Winkelgewichtsfunktionen gezeigt (dessen Maximalwert ist hier 9.27).

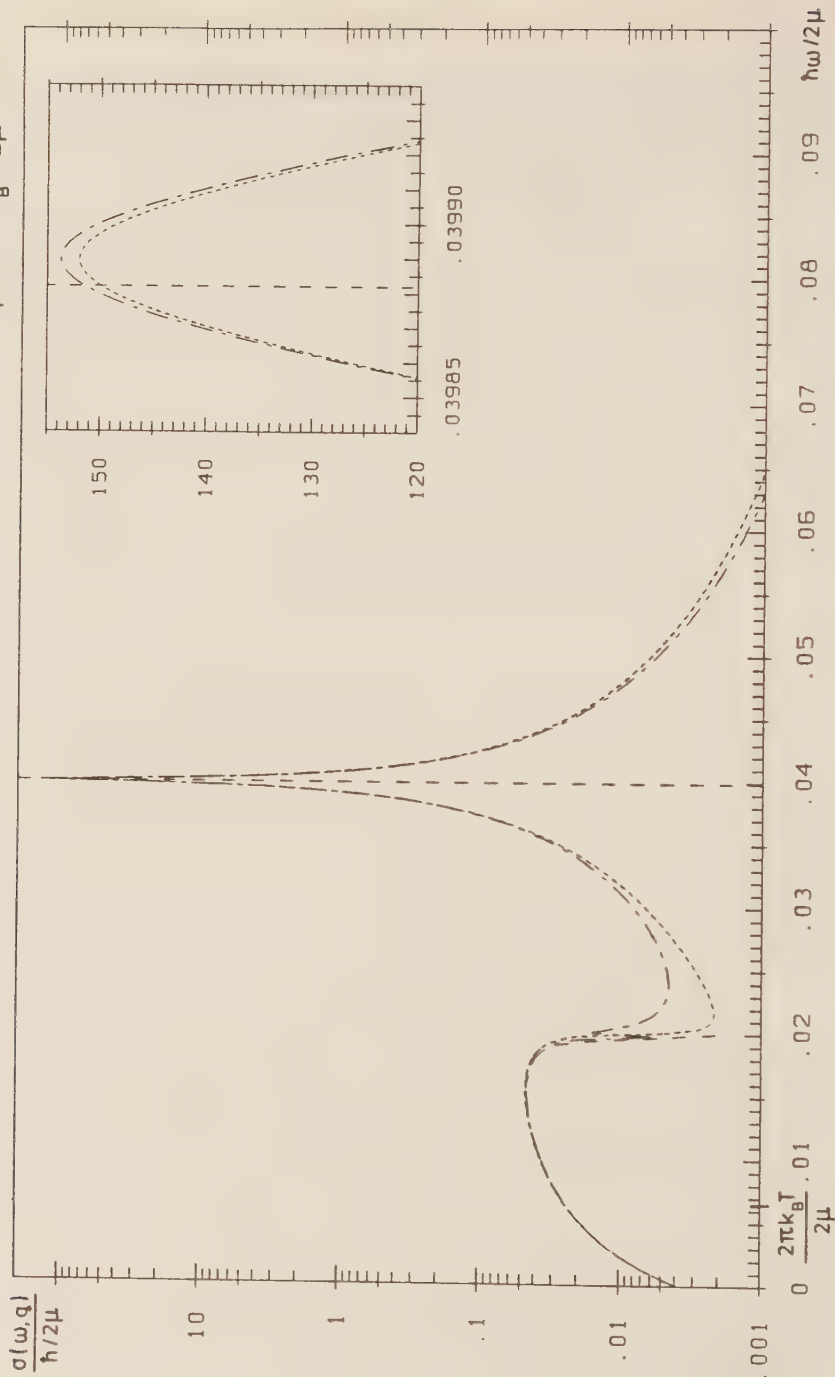
Abb. 6: $\frac{q}{k_F} = .1$, $\frac{k_B T}{2\mu} = .2$. Es ist eine "Geschmacksfrage", ob man bei dem niedrigen, breiten und stark nach rechts verschobenen Maximum, das hier auftritt, noch von Nulltem Schall sprechen will. Auf jeden Fall beherrschen hier im Bereich $\bar{\epsilon} > 1$ die inkohärenten $2p-2h$ - Anregungen das Geschehen, und die Störungsrechnung gibt praktisch nichts mehr vom wirklichen Kurvenverlauf wieder.

Abb. 7: $\frac{q}{k_F} = .608$, $\frac{k_B T}{2\mu} = .0064$. Dies ist die Temperatur ($T=.02K$) und der kleinste Wellenvektor ($q=.45\text{\AA}^{-1}$) bei dem [17] gemessen haben. Wir unterstellen, daß unsere Theorie auch jetzt noch eine brauchbare Näherung darstellt, obwohl bereits die inkohärenten $1p-1h$ - Anregungen (kontinuierlicher Teil der Kurve a)) in den "verbotenen" ϵ -Bereich hineinreichen. Trotz der niedrigen Temperatur ist die Dämpfung aufgrund des großen q-Werts stärker als in Abb. 5. Wir vergleichen insbesondere die Lage und die Halbwertsbreite des Maximums der durchgezogenen Kurve. Aus den berechneten Werten ergibt sich die Lage des Maximums zu $\epsilon_0/2\mu = 1.23 = .33\text{meV}/2\mu$, die Halbwertsbreite hat den Wert $\Delta\epsilon_0 = .066\text{meV}$. Die Messungen liefern für die Lage $(\epsilon_0)_{\max} = .72\text{meV}$ und für die Breite $\Delta\epsilon_0 = .27\text{meV}$. Diese Werte sind um einen Faktor 2.2 bzw. 4.1 größer als die theoretischen. Angesichts der oben diskutierten Einschränkungen sollte man diese Diskrepanz aber nicht überbewerten. Insbesondere kann man auch hoffen, daß bei Mitnahme höherer Landauparameter eine bessere Übereinstimmung erzielt werden kann.

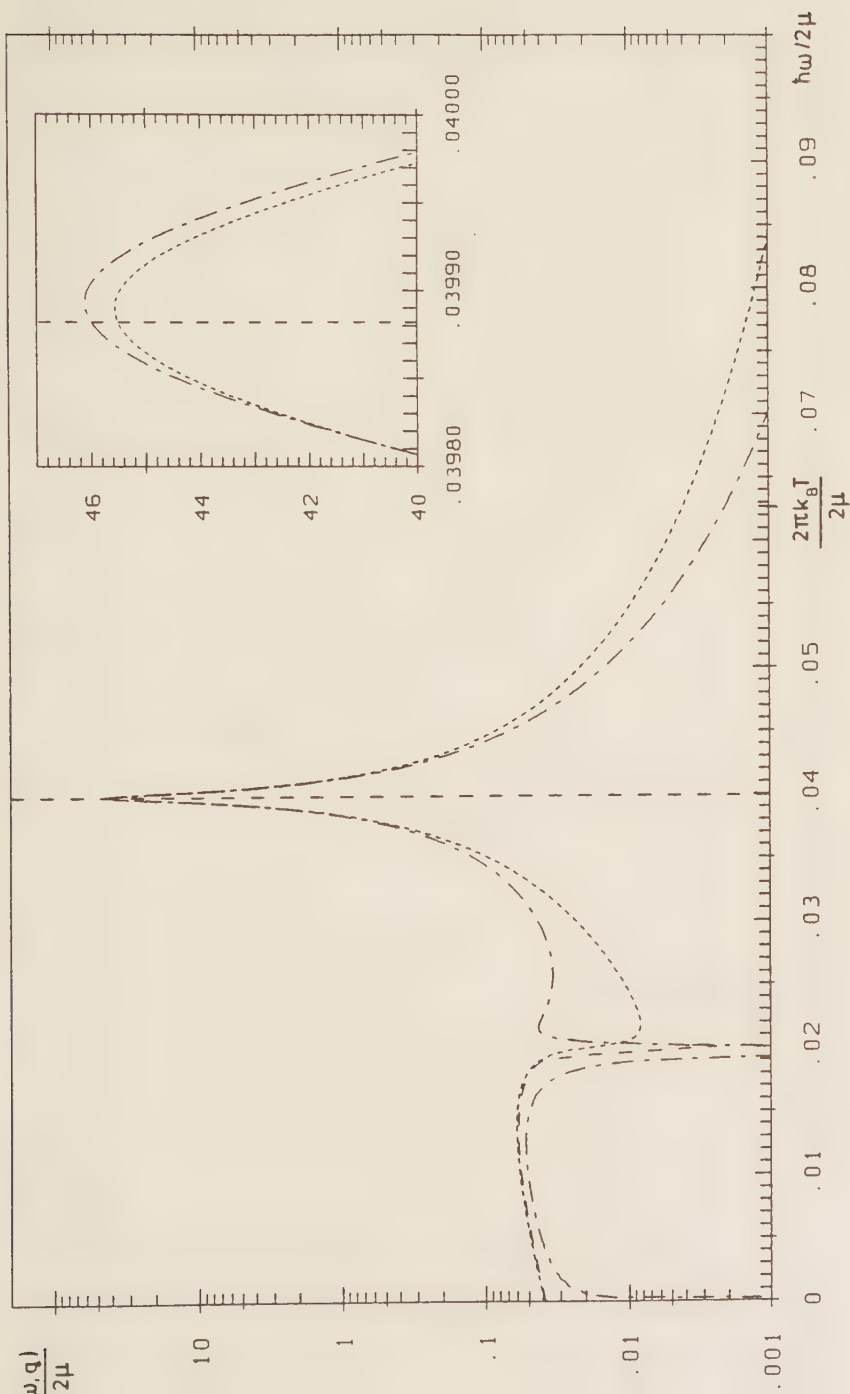
Zur Übersicht listen wir die Darstellungsarten der verschiedenen Kurven hier noch einmal auf:

- a) - - - - ohne Stoßterm
- b) in Störungsrechnung
- c) -.-.-.- mit Stoßterm (nicht angepaßte Winkelgewichtsfunktionen)
- d) _____ " " (angepaßte Winkelgewichtsfunktionen)

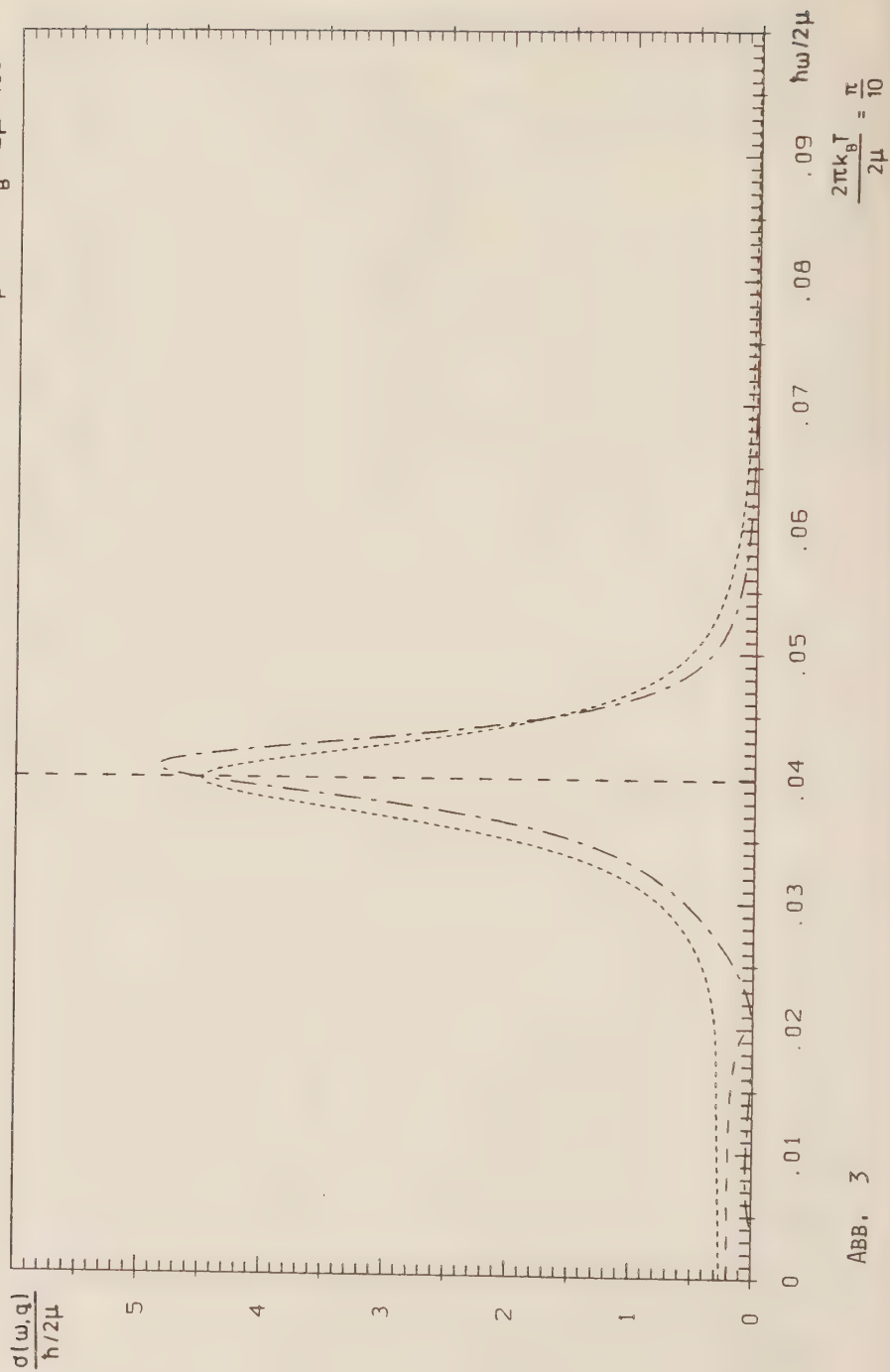
$$q/k_F = .02 \quad k_B T / 2\mu = .001$$



$$q/k_F = .02 \quad k_B T / 2\mu = .01$$



$$q/k_F = .02 \quad k_B T/2\mu = .05$$



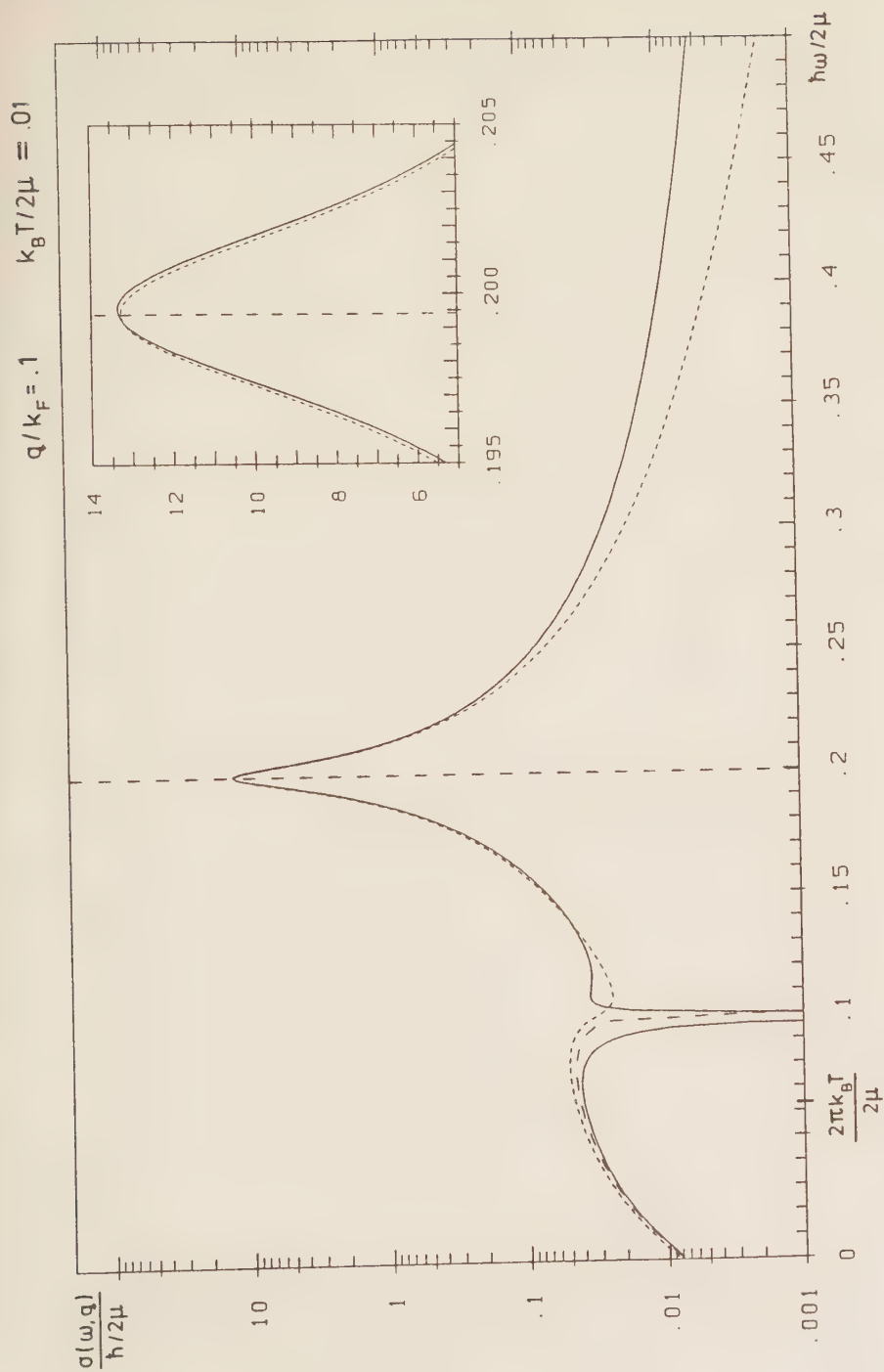
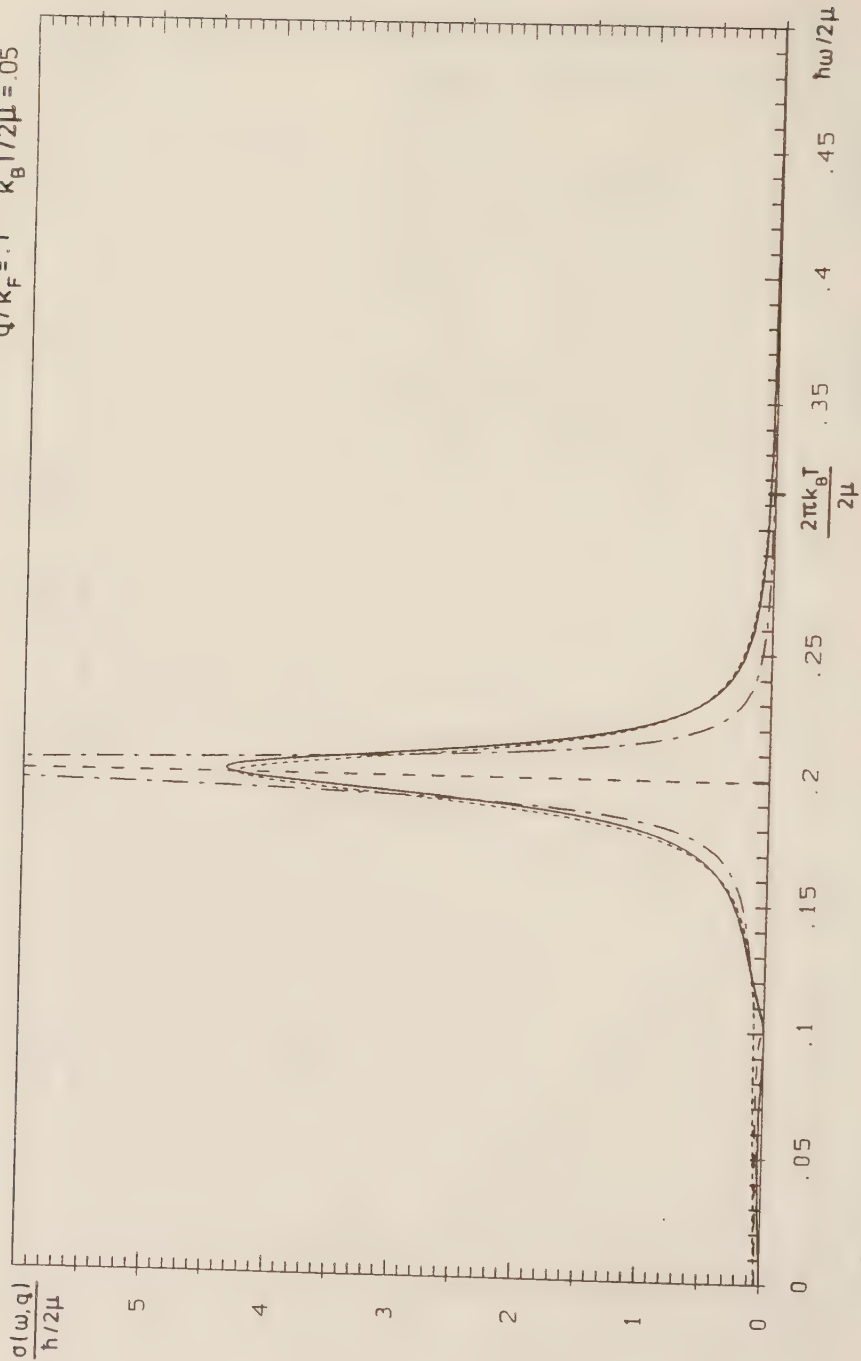
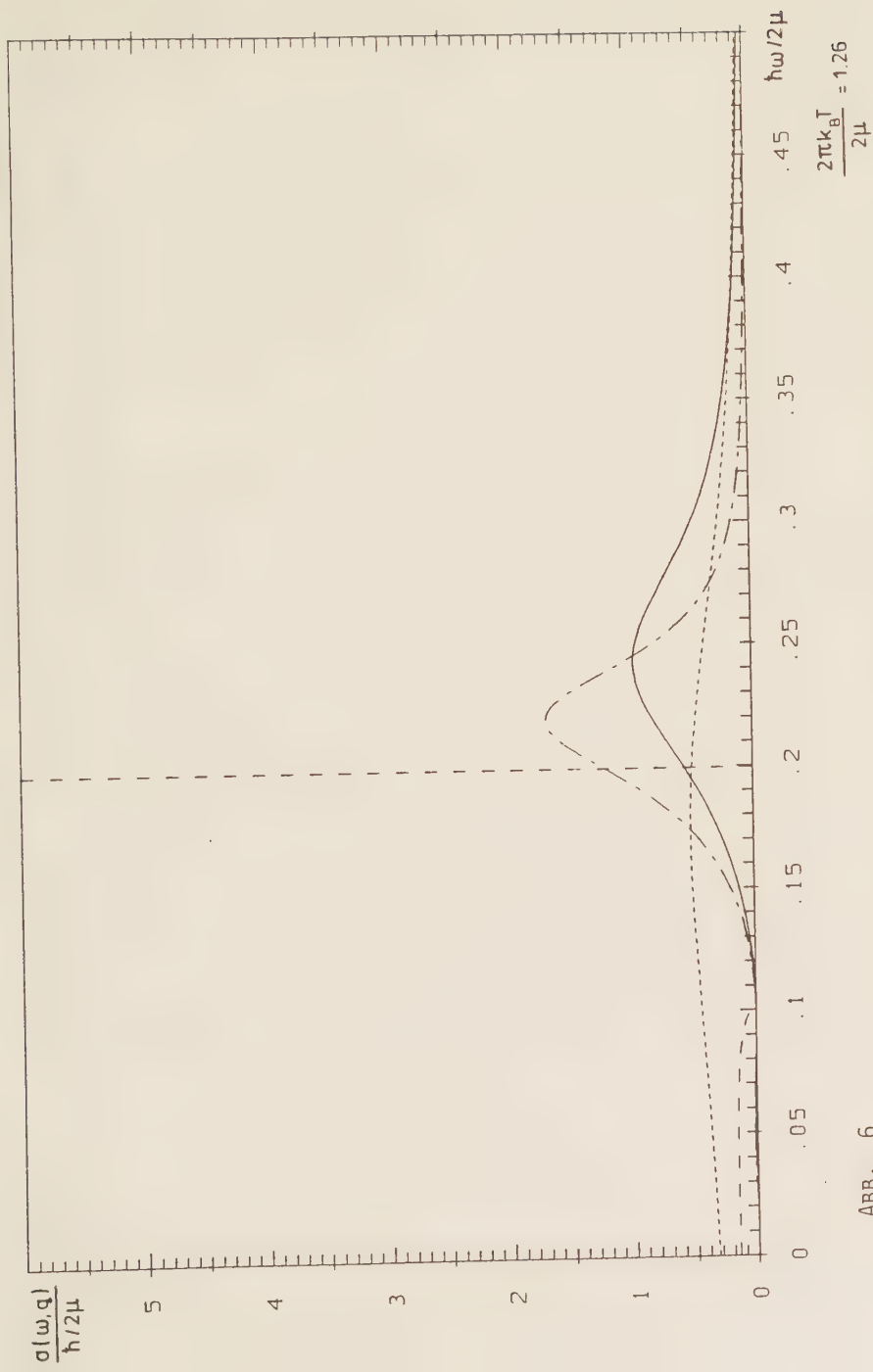


ABB. 4

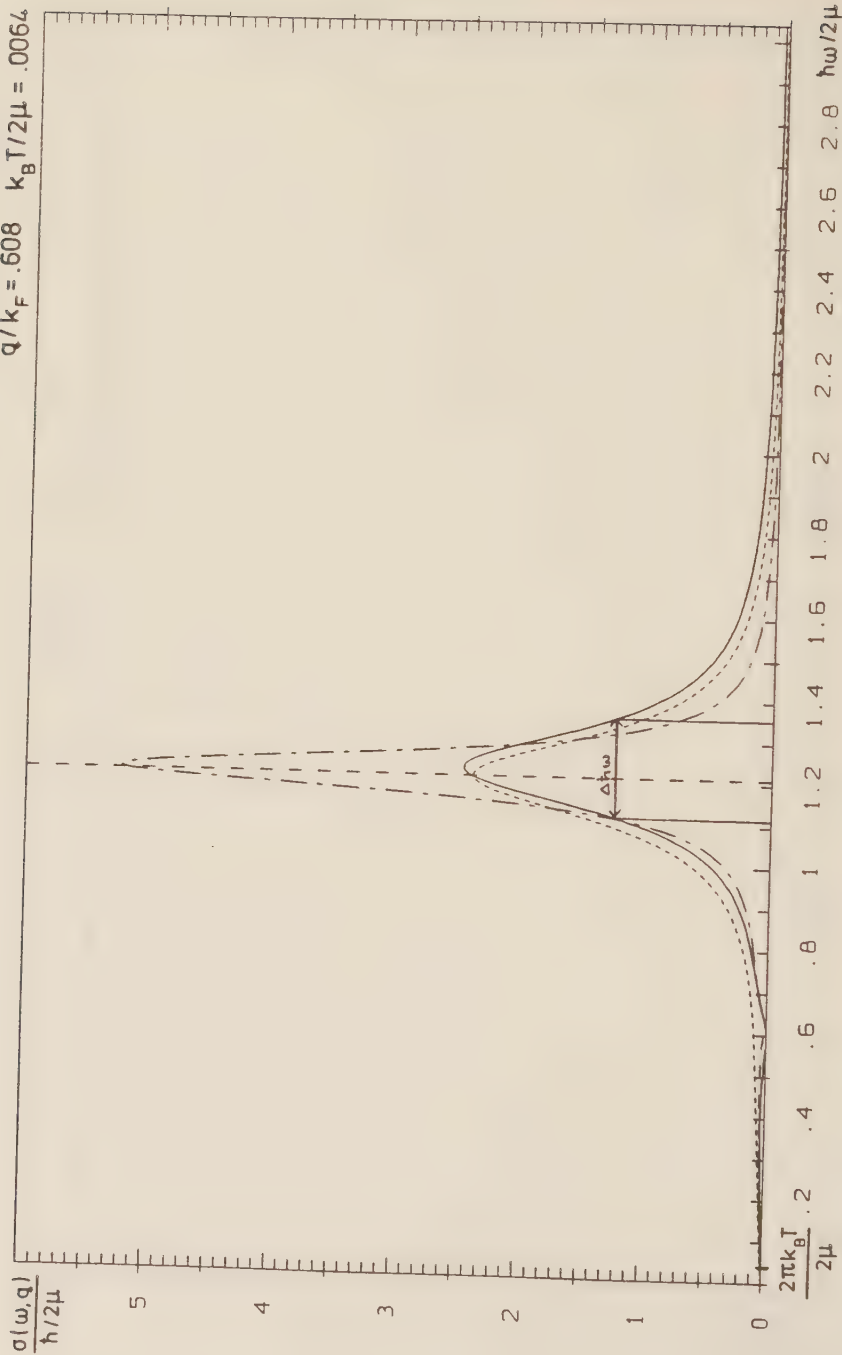
$$q/k_F = .1 \quad k_B T / 2\mu = .05$$



$$q/k_F = .1 \quad k_B T / 2\mu = .2$$



$$q/k_F = .508 \quad k_B T / 2\mu = .0064$$



Ausblick

Wir haben, ausgehend von der ersten Gleichung der Martin-Schwinger-Hierarchie und einem korrelierten Ansatz für die Zweiteilchen-Greenfunktion, eine Bewegungsgleichung für die Dichtematrix einer normalen, entarteten Fermiflüssigkeit aufgestellt und in einem einfachen Modell (δ -förmige Wechselwirkung) den dynamischen Formfaktor berechnet. Die dargestellte Theorie ist (von der Vernachlässigung des Hauptwertanteils im Stoßintegral abgesehen) noch mit folgenden Einschränkungen behaftet:

- 1) Der Gültigkeitsbereich ist streng genommen durch $\hbar\omega \ll \mu$, $q \ll k_F$ begrenzt.
- 2) Die Anpassung der für ein entartetes Fermionensystem charakteristischen Winkelgewichtsfunktionen an endliche Werte von ω, q und T wurde nur in einer globalen Näherung vorgenommen.
- 3) Die Annahme einer δ -förmigen Wechselwirkung ist für eine realistische Fermiflüssigkeit sicher zu grob, es müßten außer den nullten mindestens die ersten, evtl. auch die zweiten Landauparameter betrachtet werden.
- 4) Daß in den mittleren Feldterm und in das Stoßintegral unterschiedliche Grenzwerte der Vertexfunktion eingehen, so daß im ersten die Landauparameter F_p , im zweiten die Parameter A_p auftreten, geht aus der Theorie selbst nicht hervor, sondern muß "von Hand" eingeführt werden.

Die Aufgabe der ersten Einschränkung (die effektiv vielleicht gar nicht so viel bringen würde, vgl. die Diskussion von Abb. 7) führt zu großen mathematischen Schwierigkeiten, da dann die Impulsbeträge nicht mehr auf die Fermifläche beschränkt werden können und deshalb in den Impulsintegralen die Beträge von den Winkelintegralen nicht mehr entkoppeln. Andererseits ist es erst dann sinnvoll, in die Winkelgewichtsfunktionen mehr Arbeit zu investieren, wenn man sich auch sonst von der Einschränkung auf die Fermifläche (Näherung (4.6b)) befreit. Die Berücksichtigung weiterer Landauparameter erscheint demgegenüber lohnender und auch durchführbar.

Anhang III : Energieintegrationen im Stoßintegral

Es ist die Gl. (3.36c)

$$\begin{aligned} & \iiint\limits_0^\infty d\varepsilon_\alpha d\varepsilon_\beta d\varepsilon_\gamma d\varepsilon_\delta \left[(1-n_\alpha)(1-n_\beta)n_\gamma n_\delta - wv \right] \delta(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta - t_{cl}) \\ &= (k_B T)^3 \frac{\tau}{6} (\tau^2 + 4\pi^2) \end{aligned}$$

mit $\tau = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ und $n_\alpha = [\exp(\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{k_B T}) + 1]^{-1}$ zu beweisen.

Zunächst werden die Variablen $u_{\alpha/\beta} = \frac{\mu - \varepsilon_{\alpha/\beta}}{k_B T}$, $u_{\gamma/\delta} = \frac{\varepsilon_{\gamma/\delta} - \mu}{k_B T}$ eingeführt. Die Integrationsgrenze 0 nimmt dadurch die Werte $\pm \frac{\mu}{k_B T}$ an, wegen $\frac{k_B T}{\mu} \ll 1$ und aufgrund der Tatsache, daß die eckige Klammer nur im Bereich $u_i \approx 0$ ($i = \alpha, \beta, \gamma, \delta$) wesentlich von 0 verschieden ist, werden diese Werte durch $\pm \infty$ ersetzt. Es ist somit das Integral

$$\begin{aligned} & (k_B T)^3 \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} du_\alpha du_\beta du_\gamma du_\delta \left[n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta - (n_\alpha - 1)(n_\beta - 1)(n_\gamma - 1)(n_\delta - 1) \right] \\ & \cdot \delta(u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + u_\delta + \tau) \end{aligned}$$

zu berechnen.

Wir gehen gleich zu einem etwas allgemeineren Fall über und berechnen mit einer Methode aus [18] das Integral

$$J_m(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_m \left[\prod_{i=1}^m n(x_i) - \prod_{i=1}^m (n(x_i) - 1) \right] \delta\left(\sum_{i=1}^m x_i + y\right)$$

Die δ -Funktion wird durch ihre Integraldarstellung ersetzt

$$\delta\left(\sum_{i=1}^m x_i + y\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iyt} e^{i\left(\sum_{i=1}^m x_i + y\right)t}$$

Das m-fache Integral faktorisiert jetzt in m gleiche Integrale; nach Vertauschen der Integrationen erhält man

$$J_m(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{iyt} \left[(b(t))^m - (c(t))^m \right]$$

wobei $b(t)$ und $c(t)$ durch

$$b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{itx}}{e^x + 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{i(t-y)x}}{e^x + 1} = \frac{\pi}{\sinh \pi t}$$

$$= - \frac{i\pi}{\sinh \pi t}, \quad \text{für } t = 0^-;$$

$$c(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{itx}}{e^{-x} + 1} = - \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{i(t+y)x}}{e^{-x} + 1} = - \frac{\pi}{\sinh(-\pi t)}$$

$$= - \frac{i\pi}{\sinh \pi t}, \quad \text{für } t = 0^+;$$

gegeben sind. $J_m(y)$ läßt sich also als Integral über einen geschlossenen Weg in der komplexen t -Ebene schreiben:

$$J_m(y) = (-i\pi)^m \left[\int_{-\infty-i0}^{+\infty-i0} \frac{dt}{2\pi} + \int_{+\infty+i0}^{-\infty+i0} \frac{dt}{2\pi} \right] \frac{e^{iyt}}{\sinh^m \pi t}$$

Die Funktion $\frac{e^{iyt}}{\sinh^m \pi t}$ hat bei $t=0$ einen einfachen Pol, durch Anwenden des Residuensatzes ergibt sich das Integral zu

$$J_m(y) = (-i\pi)^m \frac{2\pi i}{2\pi} \text{Res} \left[\frac{e^{iyt}}{\sinh^m \pi t}; t=0 \right] =$$

$$= (-i)^{m-1} \frac{\pi^m}{(m-1)!} \partial_t^{m-1} \left[e^{iyt} \left(\frac{t}{\sinh \pi t} \right)^m \right]_{t=0}$$

Insbesondere ergibt sich

$$J_1(y) = 1$$

$$J_2(y) = y$$

$$J_3(y) = \frac{1}{2} (y^2 + \pi^2)$$

$$J_4(y) = \frac{y}{6} (y^2 + 4\pi^2)$$

Unser Ausgangsintegral entspricht gerade $J_4(\tau)$.

Anhang IV

1. Lösung der Null-Schall - Gleichung ohne Stoßterm

Wir betrachten die Gl. (1.26)

$$(\bar{s} - s) \varphi(s) - \frac{F_0}{2} \int_{-1}^1 ds' s' \varphi(s') = 0, \quad s \in [-1, 1]$$

Das Integral ist bzgl. s konstant, wir bezeichnen es mit $1/2 B(\bar{s})$ und erhalten als Lösung für $\bar{s} \neq 1$

$$\varphi^>(s) = \frac{1}{2} \frac{B(\bar{s})}{\bar{s} - s} \quad (1.27)$$

Es ist zu zeigen, daß im Fall $|\bar{s}| < 1$ die Lösung die Gestalt

$$\varphi^<(s) = \frac{B(\bar{s})}{2} \frac{\rho}{\bar{s} - s} + B(\bar{s}) \frac{1 - F_0 Q_1(\bar{s})}{F_0 \bar{s}} \delta(s - \bar{s}) \quad (1.32)$$

annimmt; außerdem ist die Konstante $B(\bar{s})$ zu bestimmen.

Die Lösung (1.32) ergibt sich, wenn man den allgemeinen Ansatz

$$\varphi^<(s) = \alpha \frac{\rho}{\bar{s} - s} + \beta \delta(\bar{s} - s)$$

(diese Struktur muß die Lösung für $|\bar{s}| < 1$ offensichtlich haben) in (1.26) einsetzt und $\alpha = 1/2 B(\bar{s})$ wählt (dadurch ist auch β festgelegt; die Koeffizienten α und β werden durch Gl. (1.26) gekoppelt). Zur Bestimmung von B schreiben wir (1.26) in der Form

$$\int_{-1}^1 ds' s' \left[\delta(s - s') + \frac{F_0}{2} \right] \varphi(s') =: \int_{-1}^1 ds' K(s, s') \varphi(s') = \bar{s} \varphi(s) \quad (A4.1)$$

Der dadurch eingeführte Integralkernel $K(s, s')$ ist singulär und nicht symmetrisch. Wenn man die Gleichung mit s multipliziert, erweist sich die Funktion $s\varphi(s) =: \bar{\varphi}(s)$ als Lösung der zu (1) transponierten Gleichung

$$\int_{-1}^1 ds K(s, s') \bar{\varphi}(s) = \bar{s} \bar{\varphi}(s) \quad (A4.2)$$

Die Lösungen der transponierten Gleichung (2) sind - zumindest für unterschiedliche Eigenwerte $\bar{s}$ - zu denen von (1) orthogonal. Das bedeutet, daß die Lösungen von (1) einen Hilbertraum bilden, dessen zugehöriger Dualraum durch die Lösungen von (2) gegeben ist; oder anders ausgedrückt: die Lösungen von (1)

bilden einen Hilbertraum mit der Gewichtsfunktion s , der Grund für das Auftreten einer Gewichtsfunktion ist die Nichthermitizität von $K(s, s')$. Daß die Lösungen von (2) tatsächlich orthogonal auf denen von (1) sind sieht man, wenn man (1) zum einen mit $s\varphi_{\bar{s}_1}(s)$, zum anderen nach der Vertauschung $s \leftrightarrow s'$ mit $s'\varphi_{\bar{s}_1}(s')$ multipliziert und die beiden Gleichungen voneinander subtrahiert.

Die Konstante $B(\bar{s})$ wird aus der Normierung bestimmt, auch diese ist mit der Gewichtsfunktion s zu bilden. Dabei ist der Bereich $|\bar{s}| > 1$, wo ein einziger diskreter Eigenwert $\bar{s} = s_d$ existiert (siehe Kap. IV.1) vom kontinuierlichen Anteil des Spektrums mit $|\bar{s}| < 1$ zu unterscheiden.

Im Bereich $|\bar{s}| > 1$ ist die Normierungsbedingung:

$$\int_{-1}^1 ds \varphi_{s_d}(s) s \varphi_{s_d}(s) \stackrel{!}{=} 1 \quad (A4.3)$$

woraus sich ergibt

$$B^2(s_d) = \left[\frac{2}{\frac{s_d}{s_d^2 - 1} - Q_0(s_d)} \right] = \frac{2}{|Q'_1(s_d)|} \quad (A4.4)$$

$Q'_1(s_d)$ bedeutet die Ableitung der Legendrefunktion 2. Art $Q_1(\bar{s})$ an der Stelle s_d .

Im Bereich $|\bar{s}| < 1$ haben wir die Orthonormalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^1 ds \varphi_{\bar{s}_1}(s) s \varphi_{\bar{s}_2}(s) \stackrel{!}{=} \delta(\bar{s}_1 - \bar{s}_2) \quad (A4.5)$$

Beim Einsetzen von (1.32) ist auf die sorgfältige Auswertung der Hauptwertintegrale zu achten. Wir verwenden

$$\frac{P}{\bar{s}_1 - s} = \frac{1}{\bar{s}_1 - s + i\varepsilon} + i\pi \delta(\bar{s}_1 - s), \quad \frac{P}{\bar{s}_2 - s} = \frac{1}{\bar{s}_2 - s - i\varepsilon} - i\pi \delta(\bar{s}_2 - s)$$

und erhalten, nachdem sich einige Terme wegheben,

$$B(\bar{s}) = \left\{ \bar{s} \left[\left(\frac{1 - F_0 Q_1(\bar{s})}{F_0 \bar{s}} \right)^2 + \frac{\pi^2}{4} \right] \right\}^{1/2}, \quad |\bar{s}| < 1 \quad (A4.6)$$

2. Eigenwerte und Eigenfunktionen des Integralkerns $K_{(0)}(s, s')$

Es sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Integralkerns $K_{(0)}(s, s')$ (Gl. (4.14b)) zu bestimmen.

Zu untersuchen sind die "rechte" und die "linke" Eigenwertgleichung

$$\int_{-1}^1 ds' K_{(0)}(s, s') \Psi_n(s') = \alpha_n \Psi_n(s), \quad \int_{-1}^1 ds K_{(0)}(s, s') \bar{\Psi}_n(s) = \alpha_n \bar{\Psi}_n(s')$$

mit dem nichthermiteschen Integralkern

(A 4.7)

$$K_{(0)}(s, s') = \frac{F_0}{2} \frac{s'}{\bar{s} + i\eta - s'}$$

Vorab sei bemerkt, daß $K_{(0)}(s, s')$ die Hilbert-Schmidt - Bedingung

$$\text{tr } \hat{K}_{(0)} \hat{K}_{(0)}^\dagger = \iint_{-1}^1 ds ds' |K_{(0)}(s, s')|^2 < \infty, \quad \bar{s} \neq 1$$

erfüllt.

Es ist zwischen Eigenwerten ungleich Null und solchen gleich Null zu unterscheiden. Wenn $\alpha_n \neq 0$ gilt, so ist, da $K_{(0)}(s, s')$ nicht von s abhängt, die zugehörige rechte Eigenfunktion $\Psi_n(s)$ konstant. Außerdem gibt es offenbar nur einen solchen Eigenwert, der wegen der Konstanz der zugehörigen Eigenfunktion auch nicht entartet sein kann. Wir wählen dafür den Index $n=0$ und erhalten

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 ds' K_{(0)}(s, s') \quad (\text{A 4.8})$$

$$\Psi_0(s) = \frac{F_0}{2} \frac{D_0}{\alpha_0} = \text{const}$$

α_0 ergibt sich zu

$$\alpha_0 = F_0 Q_1(\bar{s} + i\eta) \quad (\text{A 4.9})$$

Für die zugehörige linke Eigenfunktion $\bar{\Psi}_0(s)$ ergibt sich:

$$\bar{\Psi}_0(s') = \frac{K_{(0)}(s, s')}{\alpha_0} \int_{-1}^1 ds \bar{\Psi}_0(s) =: \frac{A_0}{\alpha_0} K_{(0)}(s, s') \quad (\text{A 4.10})$$

Aus der Normierungsbedingung für die beiden Funktionen

$$\langle \overline{\psi}_0 | \psi_0 \rangle \equiv \int_{-1}^1 ds \overline{\psi}_0(s) \psi_0(s) \stackrel{!}{=} 1 \quad (A4.11)$$

folgt für die Konstanten A_0 und D_0 :

$$A_0 D_0 \stackrel{!}{=} \frac{2\alpha_0}{F_0} \quad (A4.12)$$

Wir wenden uns jetzt den Eigenwerten $\alpha_n=0, n>0$, zu. Die rechten Eigenfunktionen $\psi_n(s)$ werden nach Legendrepolyomen entwickelt, wobei die Entwicklungskoeffizienten von n abhängen:

$$\psi_n(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} a_{\ell}(n) P_{\ell}(s) \quad (A4.13)$$

Durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung erhält man für die Entwicklungskoeffizienten folgende Beziehung:

$$a_1(n) Q_0(\bar{s}+iy) + \sum_{\ell=1}^{\infty} [\ell a_{\ell-1}(n) + (\ell+1) a_{\ell+1}(n)] Q_{\ell}(\bar{s}+iy) \quad (A4.14)$$

Für die linken Eigenfunktionen machen wir einen zu (13) analogen Ansatz mit den Entwicklungskoeffizienten $\bar{a}_{\ell}(n)$, durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung erhält man jetzt

$$\bar{a}_0(n) = 0 \quad \forall n > 0 \quad (A4.15)$$

Über die übrigen $\bar{a}_{\ell}(n)$ ergibt sich keine Aussage. Wir setzen

$$\overline{\psi}_n(s) = P_n(s) \quad \forall n > 0 \quad (A4.16)$$

Die Orthonormierung der Eigenfunktionen erlaubt es jetzt, die Koeffizienten $a_{\ell}(n)$ zu bestimmen. Die Bedingungen $\langle \bar{\psi}_0 | \psi_0 \rangle = 1$, $\langle \bar{\psi}_n | \psi_0 \rangle = \langle \bar{\psi}_0 | \psi_n \rangle = 0$, $n > 0$ sind bereits erfüllt, aus der verbleibenden Bedingung $\langle \bar{\psi}_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}$, $n, m > 0$ folgt

$$a_m(n) = \delta_{nm}, \quad n, m > 0 \quad (A4.17a)$$

und durch Einsetzen in die Rekursionsbeziehung (14) erhält man schließlich

$$a_0(n) = - (2n+1) \frac{\bar{s} Q_n(\bar{s}+iy)}{Q_n(\bar{s}+iy)} \quad (A4.17b)$$

so daß die rechten Eigenfunktionen für $n > 0$ sind:

$$\psi_n(s) = \frac{a_0(n)}{2} + \frac{2n+1}{2} P_n(s) \quad (A4.18)$$

Aus (9), (10) und (12) sieht man, daß sich $\hat{K}_{(0)}$ in der Form

$$\hat{K}_{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |\psi_n\rangle \langle \bar{\psi}_n| = \alpha_0 |\psi_0\rangle \langle \bar{\psi}_0| \quad (A4.19)$$

schreiben läßt. Um auch die Resolvente $(1 - \hat{K}_{(0)})^{-1}$ in der Spektraldarstellung hinschreiben zu können, muß man nachweisen, daß das Eigenfunktionensystem $\{\bar{\psi}_n(s), \psi_n(s)\}$ vollständig ist. Unter Verwendung der Beziehungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(s) P_n(s') = 2 \delta(s-s') \quad (A4.20)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n(s) P_n(s') = \frac{P}{s-s'} \Theta(1-|s|)$$

kann man zeigen, daß wirklich die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n\rangle \langle \bar{\psi}_n| = 1 \quad (A4.21)$$

erfüllt ist.

Anhang V

1. Herleitung des Stoßintegrals

Es ist das $\lambda-\mu$ - Matrixelement des Stoßintegrals, für das die Bezeichnung $iL_{\lambda\mu}$ gewählt wird, zu berechnen. Ausgangspunkt ist die rechte Seite von Gl.(3.35c), wobei die Hauptwertanteile und der δ -Anteil ohne $\hbar\omega$ gleich weggelassen werden (ebenso wie der Strich an ω):

$$iL_{\lambda\mu} = -2i\pi \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_{\lambda'\mu'} [(\lambda\delta' | V | \alpha'\beta') \delta_{\gamma'\mu'} - (\gamma'\delta' | V | \mu'\beta') \delta_{\lambda\alpha'}] (\alpha\beta | V | \gamma\delta) \cdot \\ \cdot \delta(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_{\beta'} - \varepsilon_{\gamma'} - \varepsilon_\delta - \hbar\omega) [(1-\mu_{\alpha'})(1-\mu_{\beta'}) \mu_{\gamma'} \mu_\delta - \nu\nu'] \cdot \quad (A5.1) \\ \cdot [\delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\beta'\beta} \delta_{\gamma'\gamma} C_{\delta\delta'}^\dagger + \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\beta'\beta} \delta_{\gamma'\gamma} C_{\delta\delta'}^\dagger - \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\gamma'\gamma} \delta_{\delta\delta'} C_{\beta\beta'}^\dagger - \delta_{\beta'\beta} \delta_{\gamma'\gamma} \delta_{\delta\delta'} C_{\alpha\alpha'}^\dagger]$$

Der erste Schritt besteht darin, die Zahl der Summationen mit Hilfe der Kroneckerdeltas zu reduzieren. Das Potentialmatrixelement mit $\delta_{\gamma'\mu'}$ wird vorübergehend mit "1", das mit $\delta_{\lambda\alpha'}$ mit "2", die einzelnen $C^\dagger$ -Terme mit "3" ... "4" durchnummeriert. Man erhält dann z.B. folgende Beiträge:

$$iL_{\lambda\mu}^{(1)} = -2i\pi \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (\lambda\delta | V | \alpha\beta) (\alpha\beta | V | \gamma\delta) \delta(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta - \hbar\omega) [(1-\mu_\alpha)(1-\mu_\beta) \mu_\gamma \mu_\delta - \nu\nu'] C_{\lambda\mu}^\dagger \\ iL_{\lambda\mu}^{(2)} = -2i\pi \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} (\gamma\delta | V | \mu\beta) (\alpha\beta | V | \gamma\delta) \delta(\varepsilon_\lambda + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta - \hbar\omega) [(1-\mu_\lambda)(1-\mu_\beta) \mu_\gamma \mu_\delta - \nu\nu'] C_{\lambda\mu}^\dagger$$

Durch Umbenennen der Summationsindizes in $L_{\lambda\mu}^{(1)}$ gemäß $\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta$ kann man diese beiden Beiträge zusammenfassen:

$$iL_{\lambda\mu}^{(1)} + iL_{\lambda\mu}^{(2)} =: iL_{\lambda\mu}^{(1)} = \\ = -2i\pi \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \left\{ (\lambda\beta | V | \gamma\delta) (\gamma\delta | V | \alpha\beta) \delta(\varepsilon_\lambda + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta - \hbar\omega) [\mu_\gamma \mu_\beta (1-\mu_\gamma)(1-\mu_\beta) - \nu\nu'] + \right. \\ \left. + (\mu\beta | V | \gamma\delta) (\gamma\delta | V | \alpha\beta) \delta(\varepsilon_\lambda + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta - \hbar\omega) [(1-\mu_\lambda)(1-\mu_\beta) \mu_\gamma \mu_\delta - \nu\nu'] \right\} C_{\lambda\mu}^\dagger \quad (A5.2)$$

Auch die übrigen Beiträge treten paarweise auf und lassen sich durch Indexumbenennen zusammenfassen. Außerdem lassen sich die Paare $(1\alpha)(2\gamma)$ und $(1\beta)(2\delta)$ noch miteinander verschmelzen, so daß das Stoßintegral schließlich folgende 3 Anteile enthält (vgl. (3.37)):

$$\begin{aligned}
 i L_{\lambda\mu} = & -2i\pi \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \left\{ (\lambda\beta|V|\gamma\delta)(\gamma\delta|V|\alpha\beta) \delta(\varepsilon_\mu + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta + t_\omega) [u_\mu u_\beta (1-u_\gamma)(1-u_\delta) - v v] + \right. \\
 & \left. + (\mu\beta|V|\gamma\delta)(\gamma\delta|V|\lambda\beta) \delta(\varepsilon_\lambda + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_\delta - t_\omega) [(1-u_\lambda)(1-u_\beta) u_\gamma u_\delta - v v] \right\} C_{\lambda\mu}^+ - \\
 & -2i\pi \sum_{\alpha\beta\gamma\delta'} \left\{ (\lambda\beta|V|\gamma\delta)(\gamma\delta|V|\mu\beta') \delta(\varepsilon_\mu + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_{\delta'} + t_\omega) [u_\mu u_\beta (1-u_\gamma)(1-u_{\delta'}) - v v] + \right. \\
 & \left. + \delta(\varepsilon_\lambda + \varepsilon_{\beta'} - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_{\delta'} - t_\omega) [(1-u_\lambda)(1-u_{\beta'}) u_\gamma u_{\delta'} - v v] \right\} C_{\lambda\beta'}^+ + \\
 & + 4i\pi \sum_{\beta\gamma\delta\delta'} \left\{ (\lambda\beta|V|\gamma\delta)(\gamma\delta|V|\mu\beta') \delta(\varepsilon_\mu + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_{\delta'} + t_\omega) [u_\mu u_\beta (1-u_\gamma)(1-u_{\delta'}) - v v] + \right. \\
 & \left. + \delta(\varepsilon_\lambda + \varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma - \varepsilon_{\delta'} - t_\omega) [(1-u_\lambda)(1-u_\beta) u_\gamma u_{\delta'} - v v] \right\} C_{\delta\delta'}^+ =: \\
 =: & i L_{\lambda\mu}^{(1)} + i L_{\lambda\mu}^{(2)} + i L_{\lambda\mu}^{(3)} \quad (A5.3)
 \end{aligned}$$

Im weiteren wird in jedem der hierdurch definierten Summanden $i L_{\lambda\mu}^{(j)}$ ($j=1,2,3$) der erste Anteil mit $i L_{\lambda\mu}^{(ja)}$, der zweite mit $i L_{\lambda\mu}^{(jb)}$ bezeichnet. Die nächsten Schritte werden der Kürze halber nur für den Anteil $i L_{\lambda\mu}^{(1a)}$ im Detail vorgeführt, sie verlaufen bei den anderen Anteilen analog.

Zunächst werden die Summationen durch Integrale ersetzt und durch Einführen der Vertexfunktion Γ die Impuls- und Spinerhaltung von den Potentialmatrixelementen abgespalten. Die kontinuierliche Schreibweise wird in q symmetrisch und so gewählt, daß die physikalische Bedeutung der Graphen (5.2) hervorgehoben wird:

$$\lambda \rightarrow k_0 + \frac{q}{2}, \quad \mu \rightarrow k_0 - \frac{q}{2}, \quad \alpha \rightarrow k_4, \quad \beta \rightarrow k_1, \quad \gamma \rightarrow k_2, \quad \delta \rightarrow k_3 + \frac{q}{2}, \quad q \text{ konst.}$$

$$\sum_{\beta} \longrightarrow \sum_{k_\beta} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k_1, \quad k_0 \pm q/2 =: 0 \pm \text{etc.}$$

$$2 (\lambda\beta|V|\gamma\delta)_A = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(k_0 + k_1 - k_2 - k_3) \delta_{\lambda+\beta, \gamma+\delta} \Gamma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} (0+, 1; 3+, 2)$$

Damit erhält man, wenn man die Abkürzungen $k_0 + \frac{q}{2} =: 0+$ etc. einführt:

$$\begin{aligned}
 i L_{0+0-}^{(1a)} = & -i \frac{\pi}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \frac{V^2}{(2\pi)^6} \iiint d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 d^3 k_4 \delta(k_0 + k_1 - k_2 - k_3) \cdot \\
 & \cdot \delta(k_2 + k_3 + q/2 - k_4 - k_1) \delta_{0+\lambda_1 \lambda_2, \lambda_3 \lambda_4} \delta_{\lambda_1+\lambda_2, \lambda_3+\lambda_4} \Gamma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} (0+, 1; 3+, 2) \cdot \\
 & \cdot \Gamma_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} (3+, 4+) \delta(\varepsilon_{0+} + \varepsilon_{\lambda_1} - \varepsilon_{\lambda_2} - \varepsilon_{3+} + t_\omega) [u_{0+} u_{\lambda_1} (1-u_{\lambda_2})(1-u_{3+}) - v v] C_{0+0-}^+
 \end{aligned}$$

(in $i L_{0+0-}^{(1b)}$ wird $k_3 - \frac{q}{2}$ für δ eingeführt).

Durch Ausführen der Spinsummation über σ_4 und der Integration über k_4 erreicht man das Niveau von Gl.(4.3) bzw. (5.1):

$$iL_{0+0-}^{(1a)} = -i \frac{\pi}{2} C_{0+0-}^+ \sum_{\sigma_2, \sigma_3} \frac{V^2}{(2\pi)^6} \iiint d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 \left| \Gamma_{\sigma_2, \sigma_3, \sigma_2}(\sigma+1, 3+2) \right|^2 \delta_{\sigma_2+\sigma_3, \sigma_2+\sigma_3} \cdot \\ \cdot \delta(k_0+k_1-k_2-k_3) \delta(\varepsilon_0+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_\omega) \left[u_{\sigma_2-1, \sigma_1}(1-u_2)(1-u_3)-v \right]$$

Dieser Ausdruck wird in folgenden Schritten weiterverarbeitet:

1) Spinsummationen

Wenn man $\sigma_0 = \uparrow$ setzt, so sind von der Spinsummation 3 Summanden mit der durch das Kroneckerdelta ausgedrückten Gesamtspinerhaltung verträglich, nämlich die Kombinationen $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) = (\uparrow \uparrow \uparrow), (\uparrow \uparrow \downarrow), (\uparrow \downarrow \downarrow)$. Da die beiden letzten Fälle physikalisch nicht unterscheidbar sind, liefern die Spinsummationen (die Verteilungsfunktionen hängen nicht vom Spin ab):

$$\sum_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \left| \Gamma_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} \right|^2 = \left| \Gamma_{\uparrow \uparrow} \right|^2 + 2 \left| \Gamma_{\uparrow \downarrow} \right|^2 \quad (A5.4a)$$

Der Einfachheit halber sind auf der rechten Seite nur die vorderen beiden Spinindizes hingeschrieben.

(4a) ist mit der Streuamplitude zu identifizieren. Wie auf der linken Seite der Gleichung geht man auch hier zu den spinsymmetrischen bzw. antisymmetrischen Größen $\Gamma^{(s)}$ und $\Gamma^{(a)}$ über vermöge

$$\Gamma_{\uparrow \uparrow} = \Gamma^{(s)} + \Gamma^{(a)}, \quad \Gamma_{\uparrow \downarrow} = \Gamma^{(s)} - \Gamma^{(a)} \quad (A5.4b)$$

außerdem wird Γ als konstant bzgl. der Impulse angenommen. Γ ist dann insbesondere gleich der Vorwärtsstreuamplitude, wodurch die Landauparameter $A_0^{(s,a)}$, die konstanter Vorwärtsstreuamplitude entsprechen, eingeführt werden.

Mit

$$\frac{V m^* k_F}{\pi^2 \hbar^2} \Gamma^{(s),(a)} = A_0^{(s),(a)}$$

ergibt sich dann aus (A5.4a)

$$\frac{\pi^4 \hbar^4}{V^2 m^{*2} k_F^2} \left\{ (A_0^{(s)} + A_0^{(a)})^2 + 2 (A_0^{(s)} - A_0^{(a)})^2 \right\} = \\ = \frac{\pi^4 \hbar^4}{V^2 m^{*2} k_F^2} \left\{ 3 A_0^{(s)2} + 3 A_0^{(a)2} - 2 A_0^{(s)} A_0^{(a)} \right\} =: \frac{\pi^4 \hbar^4}{V^2 m^{*2} k_F^2} \beta^2$$

2) Impulsintegrationen

Mit der k_3 -Integration wird die δ -Funktion eliminiert, für die k_1 - und die k_2 -Integration wird eine bereits von Abrikosov und Khalatnikov vorgeschlagene Methode [13] gewählt.

Die Stoßgeometrie gemäß der Impulserhaltung $\delta(k_0 + k_1 - k_2 - k_3)$ ist folgende:



der Gesamtimpuls sei mit $K = k_0 + k_1 = k_2 + k_3$ bezeichnet.

k_0 ist von außen festgelegt, k_1 ist frei wählbar und wird in sphärischen Polarkoordinaten um eine beliebige Achse integriert. Liegen k_0 und k_1 fest, so ist k_2 zwar im Prinzip ebenfalls noch frei wählbar, aber nicht alle Werte der Projektion von k_2 auf K sind für den Stoß gleich "effektiv". Das liegt daran, daß durch die Energieerhaltung und die Pauliblockierung die Beträge der Wellenvektoren $k_0 - q/2$, k_1 , k_2 und $k_3 + q/2$ auf einen kleinen Bereich um k_F beschränkt sind (vgl. Kap. II). Dem wird dadurch Rechnung getragen, daß k_2 in Zylinderkoordinaten um die Achse K integriert ($d^3k_2 = k_{2\perp} dk_{2\perp} dk_{2\parallel} d\phi$) und dieses Integrationselement unter Verwendung des Impulssatzes sowie der Beziehungen

$$|k_{2\parallel} \pm q/2| \approx k_F \Rightarrow |k_{2\parallel}| \approx k_F (1 \mp \frac{1}{2} \frac{q}{k_F} \cos \theta_{1q}) \quad (A5)$$

auf die Form

$$d^3k_2 \approx \frac{k_F}{2 \cos \frac{\theta_{01}}{2}} dk_{2\perp} dk_{2\parallel} d\phi$$

gebracht wird. Bei dieser Umformung tritt in der Jacobimatrix der Betrag

des Vektors $k_2 + k_3$ (Gesamtimpuls) auf, der den Faktor $\cos^{-1} \frac{\theta_{23}}{2}$ enthält.

Üblicherweise setzt man unter Vernachlässigung von Korrekturen à la (2.11)

$\cos \theta_{23}$ mit $\cos \theta_{01}$ gleich und erhält den Gewichtungsfaktor $\cos^{-1} \frac{\theta_{01}}{2}$, der Winkel θ_{01} im Bereich um π bevorzugt. Da diese Gewichtsfunktion für $T \neq 0$, $q \neq 0$

weder exakt ist noch einen analytisch behandelbaren Stoßoperator liefert, wird sie - zunächst formal - durch eine Gewichtsfunktion f_C ersetzt:

$$\cos^{-1} \frac{\theta_{10}}{2} \rightarrow f_C(\cos \theta_{10})$$

Eine geeignete Wahl für f_C wird weiter unten diskutiert. Das Zeichen "*" in (5) ist im gleichen Sinn zu verstehen wie in (2.6).

Schließlich wird vermöge

$$dk_i \approx \frac{m^* k_B T}{\hbar^2 k_F} du_i \quad (A5.6)$$

auf Integration über die normierten Energien $u_i = \frac{\epsilon_i - \mu}{k_B T}$ statt über Impulsbeträge übergegangen. Führt man noch die Integration über $\epsilon_0^{(1)}$ ein, so lautet $iL_{0+0-}^{(1a)}$:

$$\begin{aligned} iL_{0+0-}^{(1a)} &= -i \frac{\pi}{2} C_{0+0-}^+ \frac{V^2}{(2\pi)^6} \frac{m^* k_F}{\hbar^2} (k_B T)^2 \frac{k_F}{2} \left(\frac{m^* k_B T}{\hbar^2 k_F} \right)^2 \frac{\pi^4 k_F^4}{V^2 m^{*2} k_F^2} 3 \mathcal{A}^2 \cdot \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} du_0 du_1 du_2 du_3 \iint d\Omega_1 d\phi \, f_C(\cos \Theta_{10}) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{k_B T} \delta(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + \tau) [u_0 u_1 (1 - u_2)(1 - u_3) - \tau^2] \end{aligned}$$

Dabei ist $\tau = \frac{\hbar \omega}{k_B T}$.

Um die Winkel- von den Energieintegrationen zu trennen, werden die Integrationen über du_0 und du_3 statt du_0 und du_3 geführt (unter Benutzung von (5) und (6)). Die Energieintegrationen liefern dann (siehe Anhang III)

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} du_0 du_1 du_2 du_3 \delta(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + \tau) [u_0 u_1 (1 - u_2)(1 - u_3) - \tau^2] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} du_0 du_1 du_2 du_3 \delta(u_0 + u_1 - u_2 - u_3 + \tau) [(1 - u_0)(1 - u_1)u_2 u_3 - \tau^2] \\ &= \frac{\pi}{6} [\tau^2 + 4\pi^2] \end{aligned}$$

Die mittlere Zeile ist das Integral, das in $iL_{0+0-}^{(1b)}$ auftritt, und das den Unterschied zu $iL_{0+0-}^{(1a)}$ ausmacht. Damit ergibt sich für $iL_{0+0-}^{(1)} = iL_{0+0-}^{(1a)} + iL_{0+0-}^{(1b)}$:

$$\begin{aligned} iL_{0+0-}^{(1)} &= -i \frac{3}{2\pi} \mathcal{A}^2 \frac{(k_B T)^3}{2\mu} \frac{\pi}{6} (\tau^2 + 4\pi^2) C_{0+0-}^+ \cdot \\ &\cdot \iint d\Omega_1 \frac{d\phi}{2\pi} \, f_C(\cos \Theta_{10}) \left[\left(1 + \frac{2}{k_F} s_0\right) \left(1 - \frac{2}{k_F} s_3\right) + \left(1 - \frac{2}{k_F} s_0\right) \left(1 + \frac{2}{k_F} s_3\right) \right] \end{aligned}$$

¹⁾Zur Kennzeichnung erhält iL_{0+0-} einen Strich.

In erster Ordnung q ist die eckige Klammer einfach gleich 2. Wählt man als Achse für die Ω_1 -Integration den Vektor k_0 , und verwendet

$$\iint d\Omega_1 \frac{d\phi}{2\pi} f_c(\cos\theta_{10}) = : \lambda$$

so erhält man

$$i L_{0+0-}^{(1)} = -i \frac{\lambda}{128} \mathcal{J}^2 \frac{t\omega}{2\mu} [(t\omega)^2 + (2\pi k_8 T)^2] C_{0+0-}^+ \quad (A5.7)$$

Die Verarbeitung von $i L_{0+0-}^{(2)}$ und $i L_{0+0-}^{(3)}$ verläuft in analogen Schritten, es ist nur zu beachten, daß hier die Funktion C^+ von den Integrationsvariablen abhängt.

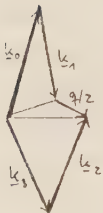
In $i L_{\lambda\mu}^{(2)}$ wird $\beta \rightarrow k_1 - \frac{q}{2}$, $\gamma \rightarrow k_2 + \frac{q}{2}$, $\delta \rightarrow k_3$, $\beta' \rightarrow k_4$ gesetzt, so daß sich nach Ausführen einer Impulsintegration und einer Spinsummation ergibt:

$$i L_{0+0-}^{(2a)} = -i \frac{E}{2} \sum_{z_1, z_2, z_3} \frac{V^2}{(2\pi)^6} \iiint d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 \Gamma_{z_1, z_2, z_3}^{(0+1-, 32-)} \Gamma_{z_1, z_2, z_3}^{(32-, 0-1+)} \cdot$$

$$\cdot \delta_{z_1+z_2, z_3+z_4} \delta(k_0 + k_1 - k_2 - k_3 + q/2) \delta(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \frac{1}{2}q)$$

$$\cdot [u_{0-} u_{1-} (1 - u_{2-})(1 - u_{3-}) - v v] C_{1+1-}^+$$

Die Stoßgeometrie ist jetzt die folgende:



Man kann wieder die k_3 -Integration mit der Impulsdeltafunktion eliminieren und k_1 in Kugelkoordinaten integrieren. k_2 wird in Zylinderkoordinaten um $k_2 + k_3$ integriert, wobei jetzt $|k_0 - \frac{q}{2}| \approx |k_1 - \frac{q}{2}| \approx |k_2 - \frac{q}{2}| \approx |k_3| \approx k_F$, so daß $d^3k_2 \approx f_C(s_{10}) \frac{k_F}{2} dk_2 dk_3 d\phi$ wird.

Für C_{1+1-}^+ wird wie in Gl. (4.9) geschrieben

$$C_{1+1-}^+ \Big|_{k_F} = \psi(s_1, \alpha_1)$$

wobei $s_1 = \cos\theta_1$ und θ_1 bzw. α_1 Polar- bzw. Azimutwinkel bzgl. der Achse q sind. Es tritt wieder die Gewichtsfunktion f_C auf; die Integration über ϕ läßt sich ausführen und liefert 2π . Es sei erwähnt, daß man die Gewichtsfunktion $f_C(\cos\theta_{10})$ mit Hilfe der Beziehung (die sich aus der Entwicklung von $P_1(s_{10})$ nach Kugelfunktionen ergibt)

$$\cos\theta_{10} \equiv s_{10} = s_0 s_1 + \sqrt{1-s_0^2} \sqrt{1-s_1^2} \cos\alpha_1 \quad (A5.8)$$

(der Azimut α_0 sei oBdA gleich Null) durch s_0 , s_1 und α_1 ausdrücken kann.

Damit gewinnt $iL'_{0+0-}(2)$ schließlich die Gestalt

$$iL'_{0+0-}(2) = -\frac{i}{128} \mathcal{A}^2 \frac{t\omega}{2\mu} [(\omega)^2 + (2\pi k_2 T)^2] \int d\mathcal{L}_1 f_C(s_{10}) \varphi(s_1, \alpha_1) \quad (A5.9)$$

In $iL'_{\lambda\mu}(3)$ wird $\beta \rightarrow k_1$, $\gamma \rightarrow k_2 \pm \frac{q}{2}$, $\delta \rightarrow k_3 \pm \frac{q}{2}$, $\delta' \rightarrow k_4$ gesetzt, nach Integration und Summation über (k_4, σ_4) ergibt sich

$$iL'_{0+0-}(3a) = i\pi \sum_{\delta_1, \delta_2, \delta_3} \frac{V^2}{(2\pi)^6} \iiint d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 \Gamma_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(0+1, 3+2-) \Gamma_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(3-2-, 0+1) \cdot$$

$$\cdot \delta_{\delta_1, \delta_2, \delta_3+2_2} \delta(k_0 + k_1 - k_2 - k_3 + \frac{q}{2}) \delta(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + t, 0) \cdot$$

$$\cdot [\mu_0 - \mu_1 (1 - \mu_2 - (1 - \mu_3)) - \nu\nu] C_{3+3-}^+$$

Die Stoßgeometrie ist hier:



Beim Ausführen der Impulsintegrationen ist zu beachten, daß C^+ hier vom Impuls "3" abhängt. Es wird deshalb die Impulsdeltafunktion durch Integration über k_1 eliminiert, k_3 wird in Kugelkoordinaten, und k_2 in Zylinderkoordinaten um die Achse $k_2-k_1 =: t$ integriert.

Es tritt dann der Betrag des Vektors t in der Jacobimatrix auf, der die Funktion $\sin\frac{\theta_{12}}{2}$ enthält. Da dieser Betrag bevorzugt λk_F ist, treten in der Beziehung zwischen $\sin\theta_{12}$ und $\sin\theta_{03}$ Korrekturen erster Ordnung in q auf. Man braucht diese jedoch nicht zu berücksichtigen, wenn man auch die

Korrekturen gemäß (2.11) vernachlässigt, in diesem Fall ist $\frac{\theta_{12}}{2} \approx \frac{\theta_{03}}{2}$ zu setzen. Vermittels der Formel (8) kann man dann schreiben

$$\sin^{-1} \frac{\theta_{03}}{2} = \sqrt{2} \left[1 - s_0 s_3 - \sqrt{1-s_0^2} \sqrt{1-s_3^2} \cos \alpha_3 \right]^{-\frac{1}{2}} =: f_S(s_0, s_3, \alpha_3)$$

Im Hinblick auf das oben zu f_C Gesagte, werden jedoch auch andere Formen für f_S zugelassen. Nach Umbenennung der Integrationsvariablen s_3, α_3 in s_1, α_1 erhält man für $iL_{0+0-}^{(3)}$ den Ausdruck:

$$iL_{0+0-}^{(3)} = \frac{i}{64} \mathcal{U}^2 \frac{k_F}{Z\mu} \left[(t\omega)^2 + (2\pi k_B T)^2 \right] \int d\mathcal{L}_1 f_S(s_0, s_1, \alpha_1) \varphi(s_1, \alpha_1) \quad (A5.10)$$

Um auf das Niveau von Gl.(4.8) zu kommen, ist noch durch $k_F v_F s_0$ zu dividieren¹⁾ (vgl. S.46). Außerdem werden, um gleich den Anschluß an die auf (4.8) folgende Diskussion herzustellen, nur azimutalsymmetrische Dichteschwankungen betrachtet, $\varphi(s, \alpha)$ hängt dann von α nicht ab. Auf dem Niveau von (4.8) lautet damit das gesamte Stoßintegral iL_{0+0-}'' ($k_F v_F = 2\mu q/k_F$):

$$\begin{aligned} iL_{0+0-}'' &= \frac{i}{128} \mathcal{U}^2 \frac{k_F}{q} t\omega \left[\left(\frac{t\omega}{2\mu} \right)^2 + \left(\frac{2\pi k_B T}{2\mu} \right)^2 \right] \frac{1}{s_0} \cdot \\ &\cdot \left\{ -\lambda \varphi(s_0) + \int d\mathcal{L}_1 \left[-f_C(s_0, s_1, \alpha_1) + 2 f_S(s_0, s_1, \alpha_1) \right] \varphi(s_1) \right\} = \\ &= \frac{i}{128} \mathcal{U}^2 2\mu \bar{s} \left[\left(\frac{t\omega}{2\mu} \right)^2 + \left(\frac{2\pi k_B T}{2\mu} \right)^2 \right] \frac{1}{s_0} \cdot \\ &\cdot \left\{ \int_{-1}^1 ds_1 \varphi(s_1) \right\} - \lambda \delta(s_1 - s_0) + \int_0^{2\pi} d\alpha_1 \left[-f_C + 2 f_S \right] \varphi(s_1) \quad (A5.11) \end{aligned}$$

Der Zahlenfaktor λ ist das Raumwinkelintegral über f_C . In der zweiten Form wurde in einer alternativen Schreibweise des Vorfaktors die normierte Phasengeschwindigkeit $\bar{s} = \frac{q}{q v_F}$ eingeführt. Drückt man die Funktionen φ gemäß (4.13) durch die Funktion ψ aus, so erhält man sofort die Matrixelemente des Operators $i\hat{K}'$ in der Form (5.5b).

¹⁾ Wir schreiben dann iL_{0+0-}'' .

2. Diskussion eines geeigneten Ansatzes für f_C und f_S

Wir gehen aus von der "nullten" Näherung für f_C und f_S , wo $(-1 \leq s_{10} \leq 1)$

$$f_C(s_{10}) = \cos^{-1} \frac{\theta_{10}}{2} = \sqrt{\frac{2}{1+s_{10}}} \quad , \quad f_S(s_{10}) = \sin^{-1} \frac{\theta_{10}}{2} = \sqrt{\frac{2}{1-s_{10}}} \quad (A5.12)$$

Formal hängen diese beiden Funktionen über die Transformation $s_{10} \rightarrow -s_{10}$ miteinander zusammen, wir werden daher im weiteren nur noch f_C betrachten (wir verlangen diese Transformationseigenschaft auch für die hier abzuleitenden Winkelgewichtsfunktionen).

Daß in (12) direkt s_{10} im Nenner steht, ist eine Folge der Näherung, daß in Gl.(2.11) alle Glieder, die ω , q (oder T) enthalten, vernachlässigt sind. Berücksichtigt man diese, so tritt im Nenner von (12) eine Funktion $s_{23}(s_{10})$ auf. Diese soll jetzt aus Gl.(2.11) bestimmt werden.

Wir betrachten dazu den Stoßprozeß aus dem Anteil $iL_{0+0-}^{(1a)}$ des Stoßintegrals (vgl. S. 96f.). Die maßgebenden Impulse gemäß der Pauliblockierklammer sind k_{0-} , k_1 , k_2 , k_{3+} (vgl. (2.1)), die Impulserhaltung lautet dann $k_2 + k_{3+} = k_{0-} + k_1 + q$. Aus dieser Impulsbeziehung und unter Verwendung von (2.10a) und (2.5) läßt sich folgender Zusammenhang zwischen s_{23+} und s_{0-1} herleiten, der die exakte Version von Gl.(2.11) für $iL_{0+0-}^{(1a)}$ darstellt:

$$s_{23+} = \frac{1}{1 + \delta_2 + \delta_{3+} + \delta_2 \delta_{3+}} \left\{ (1 + \delta_{0-} + \delta_1 + \delta_{0-} \delta_1) s_{0-2} + \right. \\ \left. + \frac{q}{k_F} \cdot (k_{0-} + k_1) - \frac{\hbar \omega}{2\mu} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{k_F^2} \right\} \quad (A5.13)$$

Um zu einer in der Winkelgewichtsfunktion brauchbaren Form zu gelangen, werden die folgenden Näherungen eingeführt:

- 1) Der Term $\frac{q}{k_F} \cdot (k_{0-} + k_1)$ wird durch seinen Mittelwert Null ersetzt (die Richtung von q ist beliebig);
- 2) $\hbar \omega / 2\mu$ wird an der Stelle $(\hbar \omega / 2\mu)_d = s_d q / k_F$ eingesetzt;
- 3) die δ_i werden auf folgende Werte spezifiziert ($t := k_B T / 2\mu$):
 $\delta_2 = (1+\tau)t$, $\delta_{3+} = -\delta_1 = -t$, $\delta_{0-} = \frac{1}{2}(1+\tau)^2 t^2 - t$

Der Wert von δ_{0-} ist in einem weiten Parameterbereich mit (2.9b) verträglich und ergibt sich aus den drei anderen δ 's unter Verwendung der um die quadratischen Terme ergänzten (exakten) Beziehung (2.10b):

$$\delta_2 + \delta_3 - \delta_0 - \delta_1 + \frac{1}{2}(\delta_2^2 + \delta_3^2 - \delta_0^2 - \delta_1^2) = \frac{t_w}{2\mu} \quad (A5.14)$$

Wenn man noch den Bruch in (12) bis zu quadratischen Gliedern in δ entwickelt, so ergibt sich als "gemitteltes" s_{23} (die Indizes $\pm$ kann man in quadratischer Ordnung weglassen):

$$\begin{aligned} \langle s_{23} \rangle = s_{01} - (1 + s_{01}) s_d \frac{q}{k_F} + \left[\left(1 - \frac{s_{01}}{2}\right) s_d^2 + \frac{1}{2} \right] \frac{q^2}{k_F^2} + \\ + \left[\left(\frac{k_B T}{2\mu}\right)^2 + s_d \frac{q}{k_F} \frac{k_B T}{2\mu} \right] s_{01} \end{aligned} \quad (A5.15)$$

Dieser Zusammenhang, bei den Parameterwerten von Abb. 4 ($q/k_F = .1$, $k_B T/2\mu = .01$) ausgewertet, wird in der Winkelgewichtsfunktion verwendet; die so definierte Funktion $f_C := f_C^{(15)}$ ist in der Abbildung am Ende des Abschnitts strichpunkt-
tiert dargestellt. An den Rändern des Definitionsbereichs gilt für $f_C^{(15)}$ näherungsweise (bei $k_B T/2\mu < q/k_F$):

$$f_C^{(15)}(-1) \sim \frac{k_F}{q}, \quad f_C^{(15)}(+1) \approx 1 + \frac{q}{k_F} \quad (A5.16)$$

Um in iL_{0+0-} zu analytisch auswertbaren Integralen zu gelangen, wird dieses $f_C^{(15)}$ noch durch ein Polynom 3. Grades $f_C^{(3)}(x=s_{10})$ angepaßt (wenn man von $f_C^{(0)}$ abgeht, müßte man eigentlich jeden Beitrag zu iL_{0+0-} individuell behandeln, wir machen aber (15) zum Ausgangspunkt einer global in allen Beiträgen verwendeten Form der Winkelgewichtsfunktionen). Die Anpassung berücksichtigt insbesondere die Randwerte $f_C(\pm 1)$, nicht ganz so gut das Integral

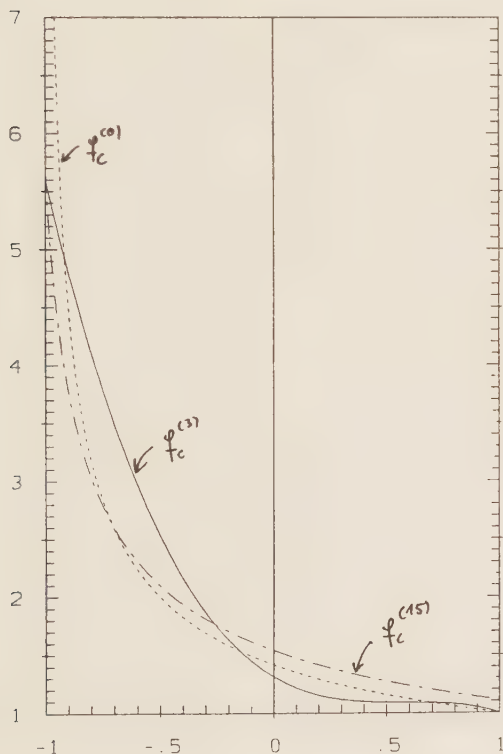
$F := \int_{-1}^1 dx f_C(x)$, außerdem soll $f_C^{(3)}$ die Bedingung $\frac{d}{dx} f_C^{(3)}(x) < 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ erfüllen (unter Berücksichtigung dieser Bedingung ist die Anpassung an F für ein Polynom 3. Grades ziemlich optimal). Daraus ergibt sich ein $f_C^{(3)}(x)$ der folgenden Gestalt

$$f_C^{(3)}(x) = -a_3 x^3 + a_2 x^2 - a_1 x + a_0 \quad (A5.17)$$

mit folgenden Koeffizienten: $a_3 = a_1 = 1.15$, $a_2 = 1.9875$, $a_0 = 1.3125$.

Der wesentliche Unterschied von $f_C^{(15)}$ und $f_C^{(3)}$ gegenüber $f_C^{(0)}$ ist, daß sie bei $x=-1$ nicht divergieren, sondern die endlichen Werte 5.63 bzw. 5.60 annehmen. Der Faktor λ wird $\lambda := 2\pi F = 7.42\pi$ für $f_C^{(15)}$, $\lambda = 7.9\pi$ für $f_C^{(3)}$. Die Größe $F_{CS}(s, s')$, die in Gl.(5.32b) unter Verwendung von (8) definiert ist, hat jetzt folgende Form:

$$F_{C3}(s, s') = \pi \left[15a_3 s^3 s'^3 - 9a_3 s s' (s^2 + s'^2) + 3a_2 s^2 s'^2 - a_2 (s^2 + s'^2) + 3(2a_1 + 3a_3) s s' + (a_2 + 2a_0) \right] \quad (15.18)$$



Vergleich von $f_C^{(0)}$, $f_C^{(15)}$ und $f_C^{(3)}$

Verzeichnis der verwendeten Literatur

- [1] L.D. Landau, JETP 5, Bd. 1, 101 (1957)
- [2] L.D. Landau, JETP 3, 920 (1956)
- [3] D. Pines, P. Nozières: The Theory of Quantum Liquids, Vol. I. Benjamin (New York) 1966
- [4] A.L. Fetter, J.D. Walecka: Quantum Theory of Many-Particle Systems. McGraw-Hill (New York) 1971
- [5] C.Y. Wong, H. Tang: Dynamics of Nuclear Physics V. Phys. Rev. C 20, 1420 (1979)
- [6] L. Kadanoff, G. Baym: Quantum Statistical Mechanics. Benjamin (New York) 1962
- [7] L.D. Landau, E.M. Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. IX. Akademie-Verlag (Berlin) 1980
- [8] W. Besold, P.G. Reinhard, C. Toepffer: Giant Resonances on Excited States. Nucl. Phys. A 431 (1984) 1-15
- [9] P.G. Reinhard, H.L. Yadav, C. Toepffer: Damping of Giant Resonances in a Stochastic Two-level Model. Preprint Erlangen 1985
- [10] M. Abramowitz, I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications (New York) 1965
- [11] C. Mahaux, H.A. Weidenmüller: Shell-Model Approach to Nuclear Reactions. North Holland Publ. Comp. (Amsterdam) 1969
- [12] J. Wilks: The Properties of Liquid and Solid Helium. Clarendon Press (Oxford) 1967
- [13] A.A. Abrikosov, I.M. Khalatnikov, Rep. Prog. Phys. 22 (1959) 329
- [14] J.W. Serene, D. Rainer: The Quasiclassical Approach to Superfluid ^3He . Phys. Rep. 101, Nr. 4, (1983) 221
- [15] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. 21. Auflage, Verlag Harri Deutsch (Thun) 1984
- [16] J.C. Wheatley: Experimental Properties of Superfluid ^3He . Rev. Mod. Phys. 47, Nr. 2, (1975) 415
- [17] P.A. Hilton, R.A. Cowley, R. Scherm, W.G. Stirling: Lifetime of Zero Sound in Liquid ^3He . J. Phys. C, 13, (1980) L295
- [18] K.H. Bennemann, J.B. Ketterson: The Physics of Liquid and Solid Helium, Part II. Wiley (New York) 1978

Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. C. Toepffer für die Überlassung dieser interessanten und lehrreichen Arbeit bedanken. Er hat durch seine rege Anteilnahme und ständige Bereitschaft zu klärendem Gespräch wesentlich zum Gelingen beigetragen. Auch meinen Institutskollegen möchte ich für hilfreiche Diskussionen und Hinweise danken.

Zu Dank verpflichtet bin ich auch R. und M. Herbst, die die mühevollen Schreibarbeiten erledigten; sowie Frau Geithner, die mir beim Anfertigen der Grafiken behilflich war.

Schließlich möchte ich der DFG für die Förderung dieser Arbeit danken.

Lebenslauf

Persönliches: Geburt am 1.11.55 in Erlangen,
verheiratet, ein Kind.

Schulbildung: 1961 Eintritt in die Volksschule Weißenstadt/
Oberfranken
1963 Volksschule in Ebersdorf/Coburg
1964 Volksschule Erlangen
1965 Besuch des Gymnasiums Fridericianum in
Erlangen, dort 1974 Abitur.

Wehrdienst: 1974-1975 in Amberg und Regensburg.

Studium: 1975-1982 Studium der Physik:
von Nov. 1975 bis Juli 1978 an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen (dort November 1977 Vordiplom);
von Oktober 1978 bis Juli 1979 an der Université de Provence, Marseille;
von Oktober 1979 bis Mai 1982 wieder an der Universität Erlangen, dort Diplomprüfung am 12. Mai 1982. Thema der Diplomarbeit: "Zur Ausbreitung von Röntgenstrahlen in Pulsarmagnetosphären".

Beruf: seit 13. Mai 1982 am Institut für Theoretische Physik II der Friedrich-Alexander-Universität als Wissenschaftlicher Mitarbeiter und Doktorand.

Abschluß der Promotion mit dem Thema:
"Die Dämpfung kollektiver Schwingungen in entarteten Fermionensystemen" voraussichtlich im Dezember 1985.

Bubenreuth, den 24. Nov. 1985

COPY  **PRINT**

*Klaus Feller
Marquardsenstr. 21*

*8520 Erlangen
Tel.: 091 31 / 24 220*